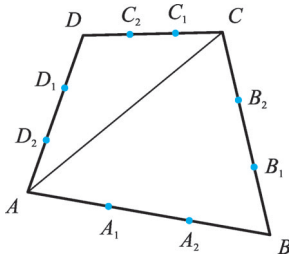


Háromszögek hasonlóságával megoldható feladatok

1201.

1201. Húzzuk meg a négyszög AC átlóját! Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ABC \sphericalangle AC$ és A_1B_2 szelőire: $AC \parallel A_1B_2$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ABC \sphericalangle AC$ és A_1B_2 párhuzamos szelőire: $AC : A_1B_2 = 3 : 2 \Rightarrow A_1B_2 = \frac{2}{3}AC$. Hasonlóan belátható, hogy $AC \parallel C_1D_2$ és $C_1D_2 = \frac{2}{3}AC$. A fentiekből következik, hogy $A_1B_2 \parallel C_1D_2$ és $A_1B_2 = C_1D_2 \Rightarrow A_1B_2C_1D_2$ paralelogramma.

1202. Az 1201. ábra jelöléseit használjuk. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ADC \sphericalangle AC$ és A_2B_1 szelőire: $AC \parallel A_2B_1$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ADC \sphericalangle AC$ és C_2D_1 szelőire: $AC \parallel C_2D_1$. A fentiekből következik, hogy $C_2D_1 \parallel A_2B_1$. Hasonlóan belátható, hogy $A_1D_2 \parallel B_2C_1$. Az új négyszög szemközti oldalegyenesesei párhuzamosak, tehát paralelogramma.

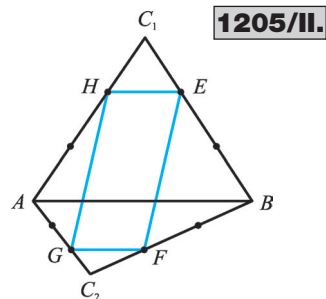
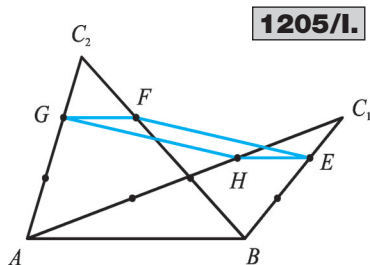
1203. Az 1201. ábra jelöléseit használjuk. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ADC \sphericalangle AC$ és C_2D_1 szelőire: $AC \parallel C_2D_1$. Hasonlóan belátható, hogy $AC \parallel A_1B_2 \Rightarrow C_2D_1 \parallel A_1B_2 \Rightarrow A_1B_2C_2D_1$ trapéz. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ADC \sphericalangle AC$ és C_2D_1 párhuzamos szelőire: $D_1C_2 : AC = 1 : 3$. Hasonlóan belátható, hogy $A_1B_2 : AC = 2 : 3 \Rightarrow D_1C_2 : A_1B_2 = 1 : 2$.

1204. Az 1201. ábra jelöléseit használjuk. Legyen a D_1B_2 és A_1C_2 szakaszok metszéspontja M . Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ADC \sphericalangle AC$ és C_2D_1 szelőire, valamint az $ABC \sphericalangle AC$ és A_1B_2 szelőire: $AC \parallel C_2D_1$ és $AC \parallel A_1B_2 \Rightarrow C_2D_1 \parallel A_1B_2$. A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva ugyanezekre a szögekre és szelőkre: $D_1C_2 : AC = 1 : 3$ és $A_1B_2 : AC = 2 : 3$. A párhuzamosság miatt $D_1MC_2 \triangle \sim B_2MA_1 \triangle$, mert szögeik páronként egyen-

lők. A hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{A_1B_2}{D_1C_2} = \frac{\frac{2}{3}AC}{\frac{1}{3}AC} = 2$. A másik két oldalpár aránya: $\frac{A_1M}{MC_2} =$

$\frac{B_2M}{MD_1} = 2$. A szakaszok 2 : 1 arányban osztják egymást.

1205. 1. eset: Ha a két háromszög ugyanabban a félsíkban van és egyenlő magas, akkor $E; F; G; H$ ugyanabban a félsíkban ugyanolyan messze van AB egyenesétől \Rightarrow egy egyenesen vannak.
2. eset: Egyébként: Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az AC_2B , illetve



AC_1B szögek GF és AB , illetve HE és AB szelőire: $GF \parallel AB$ és $HE \parallel AB \Rightarrow \underline{GF \parallel HE}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a fenti szögekre és szelőkre: $GF:AB = 1:3$ és $HE:AB = 1:3$, ezért $\underline{GF = HE}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $EFGH$ paralelogramma.

1206. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a $DBA \sphericalangle DA$ és MP párhuzamos szelőire: $\underline{DM:MB = AP:PB}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a $DBC \sphericalangle DC$ és MQ párhuzamos szelőire: $\underline{DM:MB = CQ:QB}$. Az aláhúzottakból $AP:PB = CQ:QB$. A párhuzamos szelők tételének megfordítását alkalmazzuk az $ABC \sphericalangle AC$ és PQ szelőire: $AC \parallel PQ$.

1207. Az átlók 3 : 1 arányban osztják egymást.

1208. Legyen F_a a BC oldal, F_b az AC oldal felezéspontja. Legyen $F_aA \cap F_bB = S$ a súlypont. F_aF_b a háromszög középvonala, tehát $F_aF_b \parallel AB$ és $F_aF_b = \frac{1}{2}AB$. $ABS \triangle \sim F_aF_bS \triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. A hasonlóság aránya $\lambda = \frac{AB}{F_aF_b} = 2 \Rightarrow \frac{AS}{SF_a} = \frac{BS}{SF_b} = \frac{2}{1}$. Az állítás bármely két súlyvonalra hasonlóan belátható.

1209. Legyen T az átfogóhoz tartozó magasság talppontja. $ATC \triangle \sim CTB \triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. A hasonlóság aránya: $\lambda = 2$. \Rightarrow A megfelelő oldalak: $CT = 2AT$ és $TB = 2CT \Rightarrow TB = 2 \cdot 2AT = 4AT \Rightarrow AT:TB = 1:4$.

1210. $DE = \frac{4}{3}$ cm.

1211. $A_1AT_1 \triangle \sim CAT \triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow A_1T_1 = \frac{1}{3} m_c$.

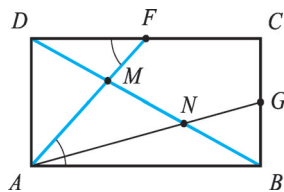
$B_2BT_2 \triangle \sim CBT \triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow B_2T_2 = \frac{2}{3} m_c$. A fentiekből következik, hogy $B_2T_2 = 2A_1T_1$. Az állítás derékszögű háromszögre is érvényes, ott azonban nem létezik az $A_1AT_1 \triangle$. $A_1T_1 = \frac{1}{3} AC$ és $B_2T_2 = \frac{2}{3} AC \Rightarrow B_2T_2 = 2A_1T_1$.

1212. a) Legyen $AC \cap H_1F_4 = M$. $AF_4M \triangle \sim CH_1M \triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \lambda = 1:2 \Rightarrow H_1M:MF_4 = 1:2$, tehát az AC átló 1 : 2 arányban osztja a H_1F_4 szakaszt.
b) Legyen $AC \cap H_3F_5 = M$. $CH_3M \triangle \sim AF_5M \triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \lambda = 3:1 \Rightarrow H_3M:MF_5 = 3$, tehát az AC átló 3 : 1 arányban osztja a H_3F_5 szakaszt.

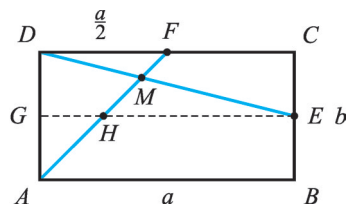
1213. $ABM \triangle \sim FDM \triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \lambda = \frac{AB}{DF} = 2 \Rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{AM}{MF} = 2:1$. Hasonlóan belátható, hogy $\frac{DN}{NB} = \frac{AN}{NG} = 2:1$.

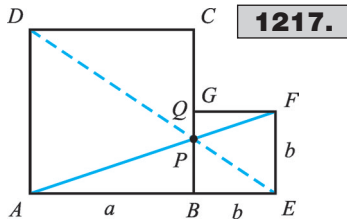
1214. Húzzunk párhuzamost E -n át AB -vel $\rightarrow G$ és H . GE a téglalap középvonala $\Rightarrow GH$ az $AFD \triangle$ középvonala $\Rightarrow H$ felezi AF -et $\Rightarrow GH = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{4} a \Rightarrow HE = \frac{3}{4} a$. $HEM \triangle \sim FDM \triangle$,

1213.



1214.





1217.

mert szögek páronként egyenlők. $\lambda = \frac{HE}{FD} = \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{1}{2}a} = \frac{3}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow HM : MF = 3 : 2$ és $\underline{EM : MD = 3 : 2} \Rightarrow HM = 3x, MF = 2x$
 és H felezi AF -et, ezért $AH = HF = 5x \Rightarrow AM = 8x$ és $MF =$
 $= 2x \Rightarrow \underline{AM : MF = 4 : 1}$.

1215. Legyenek A_1, A_2 , ill. B_1, B_2 a szárak harmadolópontjai az alaptól a szárak metszéspontja felé haladva. $ABC\Delta \sim A_2B_2C\Delta$, mert szögek páronként egyenlők. $\Rightarrow A_2B_2 = \frac{1}{3}a$. Legyen $e(A_2; B_1) \cap e(A; B) = M$. $BMB_1\Delta \cong B_2A_2B_1\Delta$, mert $B_2B_1 = BB_1$, $BB_1M\angle = B_2B_1A_2\angle$ (csúcshögek), $B_1BM\angle = B_1B_2A_2\angle$ (váltóshögek) $\Rightarrow A_2B_2 = MB \Rightarrow MB = \frac{1}{3}a$. Megjegyzés: az állítás Menelaosz tételének megfordításával is bizonyítható.

1216. Legyen $BP \cap AC = M$. $AMP\Delta \sim CMB\Delta$, mert szögek páronként egyenlők. $\lambda = \frac{AP}{CB} =$
 $= \frac{AP}{DA} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{PM}{MB} = \frac{1}{n} \Rightarrow MC = n \cdot AM$.

$$AC = AM + MC = AM + n \cdot AM = (n + 1) \cdot AM \Rightarrow \underline{\underline{\frac{AM}{AC} = \frac{1}{n + 1}}}$$

1217. Legyen $AF \cap CB = P$. $APB\Delta \sim AFE\Delta$, mert szögek páronként egyenlők. $\lambda_1 = \frac{AB}{AE} =$
 $= \frac{PB}{FE}$; $\lambda_1 = \frac{AB}{AB + BE} = \frac{a}{a + b} \Rightarrow PB = \frac{a}{a + b} \cdot b$. Legyen $DE \cap CB = Q$. $EQB\Delta \sim EDA\Delta$,
 mert szögek páronként egyenlők. $\lambda_2 = \frac{BE}{AE} = \frac{BQ}{AD}$; $\lambda_2 = \frac{BE}{AB + BE} = \frac{b}{a + b} \Rightarrow QB = \frac{b}{a + b} \cdot a$.
 A fentiekből: $PB = QB$, ezért $P \equiv Q$, tehát AF és DE a CB szakaszon metszik egymást.

1218. $PAF\Delta \sim PCG\Delta$, mert mindkettő derékszögű, és $FAP\angle = GCP\angle$, mivel a körben a BP íven nyugvó kerületi szögek. $\Rightarrow \frac{PF}{PG} = \frac{PA}{PC}$. $PHA\Delta \sim PEC\Delta$, mert mindkettő derékszögű és

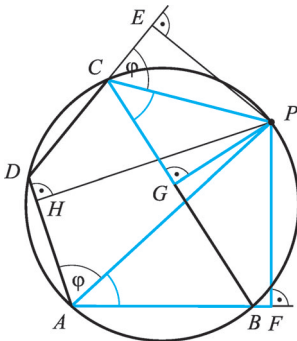
$DAPC$ húrnégyszög miatt az A -nál lévő φ szög egyenlő a C -nél lévő külső szöggel. $\Rightarrow \frac{PH}{PE} = \frac{PA}{PC}$. Az aláhúzott egyen-

lőségekből: $\frac{PF}{PG} = \frac{PH}{PE} \Rightarrow PF \cdot PE = PG \cdot PH$. Ha P valame-

lyik csúcscsal azonos, akkor az abba a csúcscba futó oldalaktól való távolsága 0, tehát mindkét szorzat 0, az állítás igaz.

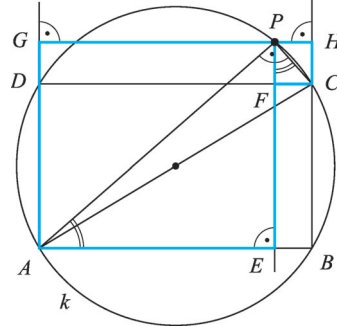
1219. Legyen a magasságpont M , az A -ból induló magasság talppontja A_1 , a B -ből induló B_1 . $AMB_1\Delta \sim BMA_1\Delta$, mert mindkettő derékszögű és M -nél lévő szögek csúcshögek. $\lambda = \frac{A_1M}{B_1M} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow AM \cdot MA_1 = BM \cdot MB_1$.

1218.



1220. $ABCD$ téglalap $\Rightarrow AC$ a kör átmérője \Rightarrow Thalész tétele miatt $\sphericalangle APC = 90^\circ$; $\sphericalangle PAE = \sphericalangle CPF$, mert merőleges szárú hegyesszögek ($PC \perp AP$, $PF \perp AE$) $\Rightarrow AEP\Delta \sim PFC\Delta$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow AEPG$ téglalap hasonló az $FCHP$ téglalaphoz.

1220.



1221. $BA_1 = 2,25$ cm és $A_1C = 5,75$ cm.

1222. Legyen a derékszögű csúcs C , a szárazon lévő osztópontok A_2, A_1 , ill. B_2, B_1 , a négyzet AB -n lévő csúcsai P és Q , AB felezőpontja F . $A_2B_2C\Delta \sim ABC\Delta$, mert két-két oldaluk

aránya és az általuk bezárt szög egyenlő. $\lambda_1 = \frac{A_2C}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2B_2 = \frac{1}{3} AB$. $APA_2\Delta \sim AFC\Delta$, mert szögeik páronként

egyenlők. $\lambda_2 = \frac{AA_2}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow A_2P = \frac{2}{3} CF$. $CF = \frac{1}{2} AB$ miatt $A_2P = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AB = \frac{1}{3} AB$. Ha-

sonlóan megmutatható, hogy $B_2Q = \frac{1}{3} AB$. $\Rightarrow A_2B_2 = A_2P = B_2Q$ és $\sphericalangle A_2PQ = \sphericalangle PQB_2 = 90^\circ \Rightarrow A_2B_2QP$ négyzet.

1223. Húzzuk meg a C -ből induló súlyvonalat: CC_1 . Felhasználjuk, hogy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó súlyvonala merőleges az átfogóra és fele olyan hosszú. $CC_1 \cap AD = S$ az $ABC\Delta$ súlypontja. $ABD\Delta \sim ASC_1\Delta$, mert mindkettő derékszögű és az A csúcs-

nál lévő szögek közös. $\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AC_1}{C_1S} = \frac{AC_1}{\frac{1}{3}CC_1} = \frac{AC_1}{\frac{1}{3}AC_1} = 3$.

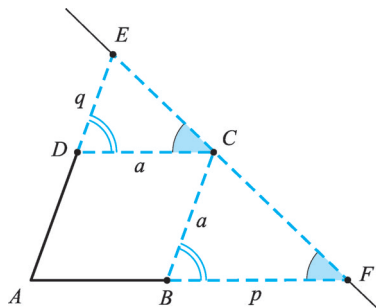
1224. $DCE\Delta \sim BFC\Delta$, mert szögeik páronként egyállású szögek, tehát egyenlők. $\lambda = \frac{DE}{BC} =$

$= \frac{DC}{BF}$, azaz $\frac{q}{a} = \frac{a}{p} \Rightarrow a^2 = pq \Rightarrow a = \sqrt{pq}$.

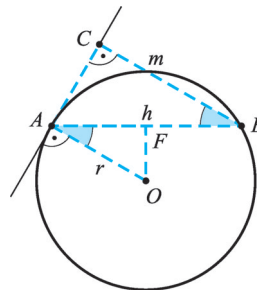
1225. Állítás: $h = \sqrt{2rm}$. $AOF\Delta \sim BAC\Delta$, mert mindkettő derékszögű, és $\sphericalangle OAB = \sphericalangle ABC$,

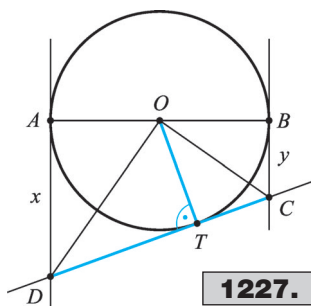
hiszen váltószögek. $\lambda = \frac{AO}{AB} = \frac{AF}{BC}$, azaz $\frac{r}{h} = \frac{2}{m} \Rightarrow h^2 = 2rm \Rightarrow h = \sqrt{2rm}$.

1224.



1225.



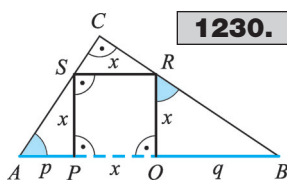


1227.

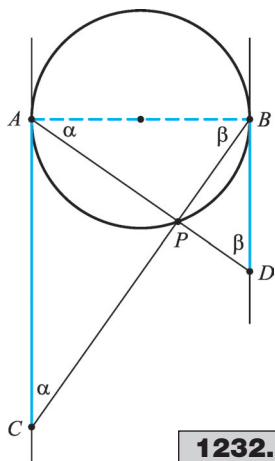
romszög: $OT = \sqrt{DT \cdot TC}$. $DT = DA = x$ és $TC = CB = y$, mert az érintőszakaszok hossza egyenlő $\Rightarrow r = OT = \sqrt{xy}$.

1228. Állítás: $AB = \sqrt{AD \cdot AC}$. $ABC\Delta \sim ADB\Delta$, mert az A csúcsnál lévő szögük közös, B -nél, illetve D -nél lévő szögük pedig β . A hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AC \Rightarrow AB = \sqrt{AD \cdot AC}$.

1229. Legyenek az $ABCD$ trapéz beírt körének érintési pontjai AB -n E , BC -n G , CD -n F és DA -n H . A trapéz egy száron lévő szögeinek összege 180° , tehát $EBC\angle + BCF\angle = \alpha + \beta = 180^\circ$. A beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja. A húrtrapéz alapon fekvő szögei egyenlők. $EBO\Delta \sim FOD\Delta$, mert mindkettő derékszögű, és $\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$, tehát szö-



1230.



1232.

1226. Legyen a CD húrra merőleges átmérő AB ! Thalész tétele miatt $ACB\Delta$ C -ben derékszögű, CT az átfogóhoz tartozó magassága. A magasságtételt alkalmazva az $ACB\Delta$ -re: $\frac{h}{2} = \sqrt{m \cdot (2r - m)} \Rightarrow h = 2\sqrt{m(2r - m)}$.

1227. Állítás: $r = \sqrt{xy}$. $AOTD$ és $BOTC$ négyszögek deltoidok, mert két-két szomszédos oldaluk egyenlő. DO felezi az $AOT\angle$ -et és CO felezi a $BOT\angle$ -et. $AOT\angle$ és $BOT\angle$ mellékszögek, tehát szögfelezőik merőlegesek egymásra. $\Rightarrow DOC\angle = 90^\circ$. $OT \perp CD$, mert az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Alkalmazzuk a magasságtételt az ODC derékszögű há-

geik egymás pótszögei. $\Rightarrow AEOH \sim BEOG \sim OGCF \sim OFDH$.

1230. Állítás: $x = \sqrt{pq}$. $APS\Delta \sim RQB\Delta$, mert mindkettő derékszögű, és az egyformán jelölt szögek merőleges szárú hegyesszögek. $\lambda = \frac{PS}{QB} = \frac{AP}{RQ}$, azaz $\frac{x}{q} = \frac{p}{x} \Rightarrow x^2 = pq \Rightarrow x = \sqrt{pq}$.

1231. Állítás: $AB = \sqrt{BC \cdot BP}$. Kössük össze P -t A -val! $ABP\Delta$ egyenlő szárú, mert FP merőlegesen felezi az AB szakaszt. $ABC\Delta \sim PAB\Delta$, mert mindkettő egyenlő szárú és a B -nél lévő szögük közös. $\lambda = \frac{AB}{BP} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BP$, tehát $AB = \sqrt{BC \cdot BP}$.

1232. Állítás: $AB = \sqrt{AC \cdot BD}$. $APB\Delta$ derékszögű Thalész tétele miatt. $DBA\angle = CAB\angle = 90^\circ$, mert az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. $APB\Delta$ hegyesszögei: α és $\beta \Rightarrow ACB\angle = \alpha$ és $ADB\angle = \beta \Rightarrow ACB\Delta \sim BAD\Delta$. $\lambda = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow AB^2 = AC \cdot BD$, tehát $AB = \sqrt{AC \cdot BD}$.

1233. $BAM\angle = ABM\angle = APB\angle = \gamma$, mert ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek. E és T pontból az AP szakasz 90° alatt látszik, ezért E és T rajta vannak az AP szakasz Thalész körén, k_1 -en. $\Rightarrow \odot EAP\angle = \odot ETP\angle$, mert ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek k_1 -ben. Jelöljük az $ABP\Delta$ $PAB\angle$ -ét α -val, $PBA\angle$ -ét β -val! $ABP\Delta$ belső szögeinek összege $\gamma + \alpha + \beta = 180^\circ$. Az A csúcsnál az érintő

két félegyenese egyenesszöget alkot: $\gamma + \alpha + \widehat{EAP} = 180^\circ$.
 Az aláhúzottakból $\widehat{EAP} = \beta$, \otimes -ből $\widehat{ETP} = \beta$. $EATP$ húrnégyszögben $\widehat{EAT} = \alpha + \beta \Rightarrow \widehat{EPT} = \gamma$. Hasonlóan megmutatható, hogy F és T rajta vannak PB Thalész körén, k_2 -n, a $TBFP$ húrnégyszögben $\widehat{TBF} = \beta + \alpha$, $\widehat{TPF} = \gamma$ és $\widehat{TFP} = \beta$, mert a k_2 kör ugyanazon ívén nyugvó kerületi szögek. $\widehat{ETP} \Delta \sim \widehat{TFP} \Delta$, mert szögeik páronként egyenlők (P csúcsnál γ ; T , ill. F csúcsnál β).

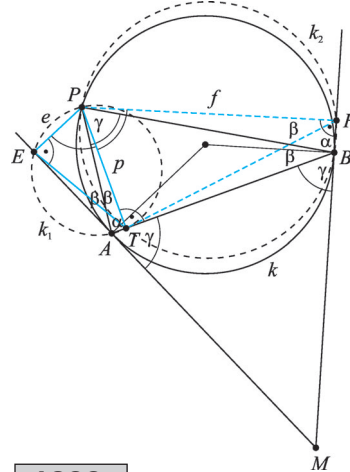
$$\lambda = \frac{EP}{PT} = \frac{PT}{PF} \Rightarrow PT^2 = EP \cdot PF \Rightarrow PT = \sqrt{EP \cdot PF}, \text{ és ezt akartuk belátni.}$$

1234. Legyen T a C -ből induló magasság talppontja. Állítás: $CT = \sqrt{TA \cdot TB}$. $\widehat{CAB} = \beta + 90^\circ \Rightarrow \widehat{CAT} = 90^\circ - \beta \Rightarrow \widehat{ACT} = \beta \Rightarrow \widehat{ACT} \Delta \sim \widehat{CBT} \Delta$, mert mindkettő derékszögű és egyik hegyesszögük β . $\Rightarrow \lambda = \frac{AT}{TC} = \frac{TC}{TB} \Rightarrow TC^2 = AT \cdot TB \Rightarrow TC = \sqrt{TA \cdot TB}$.

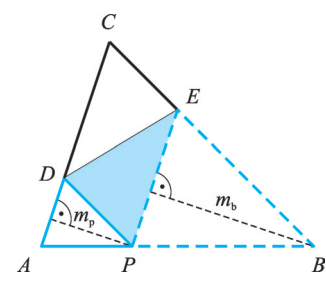
1235. Állítás: $T_{BDC} = \sqrt{T_{ABC} T_{DEC}}$. Legyen az $ABC \Delta$ C -ből induló magassága m_c , a $DEC \Delta$ C -ből induló magassága m ! $T_{BDC} = T_{DEC} + T_{DEB} = \frac{DE \cdot m}{2} + \frac{DE \cdot (m_c - m)}{2} = \frac{DE \cdot m_c}{2} \cdot T_{ABC} = \frac{AB \cdot m_c}{2}$ és $T_{DEC} = \frac{DE \cdot m}{2} \Rightarrow \otimes T_{ABC} \cdot T_{DEC} = \frac{AB \cdot DE \cdot m_c \cdot m}{4}$, $ABC \Delta \sim DEC \Delta$, mert egy szögük közös, másik két szögparjuk egyállású. $\Rightarrow \lambda = \frac{DE}{AB} = \frac{m}{m_c} \Rightarrow AB \cdot m = DE \cdot m_c$. Ezt a \otimes összefüggésbe

helyettesítve $T_{ABC} \cdot T_{DEC} = \left(\frac{DE \cdot m_c}{2} \right)^2 = (T_{BDC})^2 \Rightarrow T_{BDC} = \sqrt{T_{ABC} \cdot T_{DEC}}$.

1236. Állítás: $T_{DPE} = \sqrt{T_{APD} \cdot T_{PBE}}$. $APD \Delta \sim PBE \Delta$, mert szögeik páronként egyállású szögek. $\lambda = \frac{DA}{EP} = \frac{m_p}{m_b} \Rightarrow \otimes DA \cdot m_b = EP \cdot m_p$, $T_{DAP} = \frac{DA \cdot m_p}{2}$ és $T_{EPB} = \frac{EP \cdot m_b}{2} \Rightarrow \otimes T_{DAP} \cdot T_{EPB} = \frac{DA \cdot m_p}{2} \cdot \frac{EP \cdot m_b}{2}$. A \otimes összefüggést felhasználva $T_{DAP} \cdot T_{EPB} = \left(\frac{EP \cdot m_p}{2} \right)^2 = (T_{EPD})^2 \Rightarrow T_{DPE} = \sqrt{T_{APD} \cdot T_{PBE}}$.



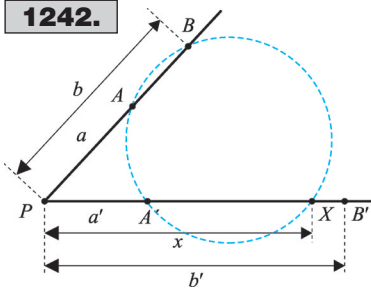
1233.



1236.

Szelődarabok szorzata

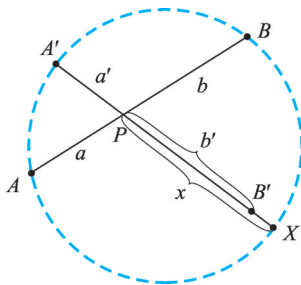
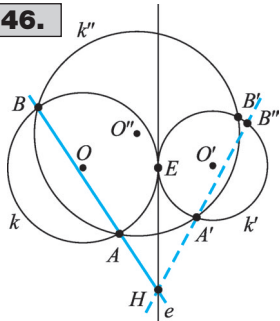
1237. Legyen az érintési pont E , a szelőnek a körrel való metszéspontjai pedig A (P -hez közelebbi) és B . $EPB \Delta \sim APE \Delta$, mert P -nél lévő szögük közös, és $\widehat{AEP} = \widehat{ABE}$, mivel a k kör AE ívén nyugvó kerületi szögek. $\lambda = \frac{EP}{AP} = \frac{BP}{EP} \Rightarrow EP^2 = AP \cdot BP \Rightarrow EP = \sqrt{AP \cdot BP}$.

1242.

egyenlők. $\lambda = \frac{BP}{PD} = \frac{CP}{PA}$, amiből $CP = PD = \frac{h}{2}$ -t felhasználva: $BP \cdot PA = \frac{h^2}{4} \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{h^2}{4} \Rightarrow \frac{h}{2} = \sqrt{BP \cdot PA}$.

1240. Legyenek az egyik szelő végpontjai A_1, B_1 , a másik szelőé A_2, B_2 . $PA_2A_1\Delta \sim PB_1B_2\Delta$, mert P -nél lévő szögek csúcshögek, $PB_1B_2\Delta$ és $PA_2A_1\Delta$ pedig a k kör ugyanazon ívéhez tartozó kerületi szögek, tehát egyenlők. $\lambda = \frac{PB_1}{PA_2} = \frac{PB_2}{PA_1} \Rightarrow PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$.

1241. A DC húrra rajzolt négyzet területe h^2 . Az AF és BF oldalú téglalap területe $AF \cdot BF$. Alkalmazzuk a szelődarabok szorzatáról szóló tételt az F ponton átmenő DC és AB szelőkre! $FA \cdot FB = FD \cdot FC$, azaz $FA \cdot FB = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow 4 \cdot FA \cdot FB = h^2$, ami a bizonyítandó állítás.

1243.**1246.**

1238. Legyenek a szelőkön a P -hez közelebbi metszéspontok A_1 , ill. A_2 , a távolabbiak B_1 , ill. B_2 . $PB_2A_1\Delta \sim PB_1A_2\Delta$, mert P -nél lévő szögek közös, $PB_2A_1\Delta$ és $PB_1A_2\Delta$ pedig a k kör ugyanazon ívén nyugvó kerületi szögek, tehát egyenlők. $\lambda = \frac{PA_2}{PA_1} = \frac{PB_1}{PB_2} \Rightarrow PA_2 \cdot PB_2 = PA_1 \cdot PB_1$.

1239. Legyenek az egyik szelő végpontjai A és B , az átmérőre merőleges másik szelőé C és D . $PBC\Delta \sim PDA\Delta$, mert P -nél lévő szögek csúcshögek, $PBC\Delta$ és $PDA\Delta$ pedig a k kör ugyanazon ívéhez tartozó kerületi szögek, tehát

1242. Tekintsük az $ABA'\Delta$ körülírt körének a PA' -vel való X metszéspontját. A szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt a P -ből induló szelőkre alkalmazva: $PA \cdot PB = PA' \cdot PX$, azaz $a \cdot b = a' \cdot x$. A feltétel szerint $a \cdot b = a' \cdot b'$, ezért $b' = x$. $\Rightarrow B' \equiv X$, tehát $B'; A; B; A'$ egy körön vannak.

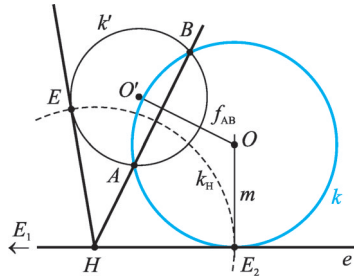
1243. Tekintsük az $ABA'\Delta$ körülírt körének a PA' -vel való X metszéspontját. A szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt a P -ből induló szelőkre alkalmazva: $PA \cdot PB = PA' \cdot PX$, azaz $a \cdot b = a' \cdot x$. A feltétel szerint $a \cdot b = a' \cdot b'$, ezért $b' = x$. $\Rightarrow B' \equiv X$, tehát $B'; A; B; A'$ egy körön vannak.

1244. HA , illetve HA' a H ponton át k -hoz húzott két szelő. A szelődarabok szorzatára vonatkozó tétel miatt $HA \cdot HB = HA' \cdot HB'$.

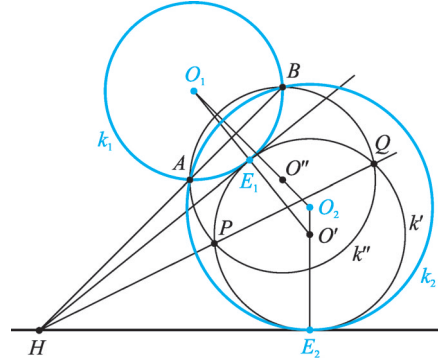
1245. Legyen E a körök érintési pontja, P a közös érintő tetszőleges pontja, A_1 és B_1 a k_1 kör és az egyik szelő, A_2 és B_2 a k_2 kör és a másik szelő közös pontja. P -ből a k_1 körhöz húzott szelőre a szelődarabokra vonatkozó összefüggés: $PA_1 \cdot PB_1 = PE^2$. P -ből a k_2 -höz húzott szelőre: $PA_2 \cdot PB_2 = PE^2$. A két egyenlőségéből $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$. A $B_1PB_2\Delta$ szárain lévő PA_1, PB_1 , illetve PA_2, PB_2 szakaszokra teljesül az 1242. feladat feltétele. E feladat állítása szerint A_1, A_2, B_1, B_2 egy körön vannak. A bizonyítás során nem használtuk ki, hogy a két kör kívülről érinti egymást.

1246. Legyen $AB \cap e = H$! A k körre a szelődarabokra vonatkozó összefüggés: $HA \cdot HB = HE^2$. Húzzunk H -ből A' -n át szelőt k' -höz! Legyen a második metszéspont B'' .

1247.



1248.



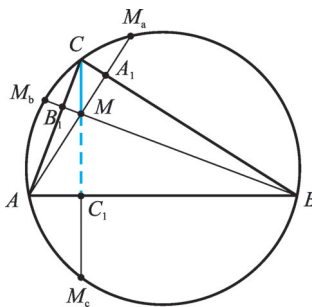
A k' körre vonatkozóan: $HA' \cdot HB'' = HE^2$. A két egyenlőségéből: $HA \cdot HB = HA' \cdot HB''$. A $BHB'' \nabla$ száraira teljesül az 1242. feladat feltétele, így a feladat állítása szerint A, A', B'' és B egy körön vannak. A, A' és B köre a k'' kör, tehát $B'' \in k''$. A k' és k'' körök közös pontjai A', B'' és B , ami $B'' \equiv B'$ -t kell jelentse. $\Rightarrow e(A'; B') \cap e = H$.

1247. 1. eset: Ha $AB \parallel e$, akkor $f_{AB} \cap e = E_2$ az érintési pont. Egyértelmű a megoldás. **2. eset:** AB nem párhuzamos e -vel. A szerkesztés: ① Vegyünk fel egy A -n, B -n átmenő tetszőleges k' kört! ② $AB \cap e = H$ ③ H -ből érintő k' -höz $\rightarrow E$. ④ H középpontú, HE sugarú k_H kör. ⑤ $k_H \cap e = E_1$. ⑥ $ABE_1 \Delta$ körülírt köre: k . Indoklás: k és k' közös húrvára és H -ből húzott érintőire $HE^2 = HA \cdot HB = HE_1^2 \Rightarrow HE = HE_1$, 2 megoldás van.

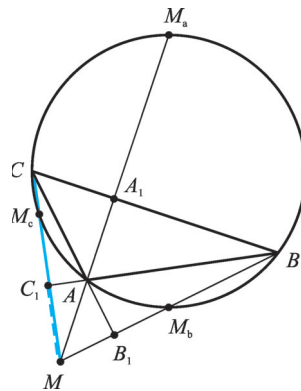
1248. Adott: $A; B; k'$. **1. eset:** $O' \notin f_{AB}$. A szerkesztés: ① Vegyünk fel egy A -n, B -n átmenő tetszőleges k'' kört, ami metszi k' -t! ② $k' \cap k'' = \{P; Q\}$. ③ $e(P; Q) \cap e(A; B) = H$. ④ H -ből érintőt szerkesztünk k' -höz $\rightarrow E_1; E_2$. ⑤ $ABE_1 \Delta$ körülírt köre: k_1 . $ABE_2 \Delta$ körülírt köre: k_2 . Indoklás: A k_1 , illetve k_2 kör érinti a k' kört. A k'' kör metszi k_1 -et és k' -t, illetve k_2 -t és k' -t. Az 1246. feladat feltételei teljesülnek a fenti körökre, így $AB \cap PQ = H$ független a k'' segédkörtől, $HE_1 = HE_2$ -t egyértelműen meghatározza. **2. eset:** $O' \in f_{AB}$. Ekkor $PQ \parallel AB \Rightarrow f_{AB} \cap k'$ lesz az érintési pont. 2 megoldás lehet.

1249. Tudjuk, hogy a magasságpont oldalegyenesekre vonatkozó tükörképe a körülírt körön van. Alkalmazzuk a szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt az M ponton átmenő szelőkre! $MC \cdot MM_c = MB \cdot MM_b = MA \cdot MM_a \Rightarrow MC \cdot 2MC_1 = MB \cdot 2MB_1 = MA \cdot 2MA_1 \Rightarrow MC \cdot MC_1 = MB \cdot MB_1 = MA \cdot MA_1$.

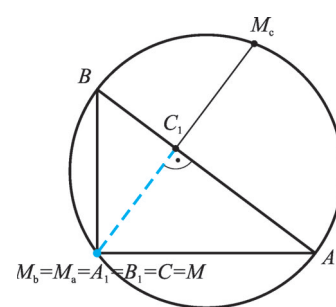
1249/I.

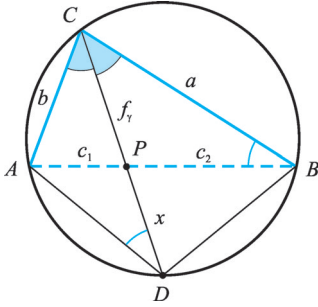


1249/II.



1249/III.



1250.

1250. Állítás: $f_\gamma^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$. Legyen a CP szögfelezőnek a körülírt körrel való metszéspontja D . A P -n átmenő AB és CD szelőkre alkalmazzuk a szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt: $f_\gamma \cdot x = c_1 \cdot c_2$. Az ADC és az ABC ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek, tehát egyenlők. $ADC \triangle \sim PBC \triangle$, mert szögek páronként egyenlők. \Rightarrow A megfelelő oldalak aránya egyenlő, azaz $a : f_\gamma = (f_\gamma + x) : b \Rightarrow ab = f_\gamma \cdot (f_\gamma + x) = f_\gamma^2 + c_1 \cdot c_2 \Rightarrow f_\gamma^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$.

1251. Az 1250. feladatban láttuk, hogy $f_\gamma^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2 \Rightarrow f_\gamma^2 < ab \Rightarrow f_\gamma < \sqrt{ab}$.

Hasonlóságon alapuló szerkesztések

Az **1252–1255.** feladat megoldását az olvasóra bízjuk.

1256. Legyen a szög csúcsa M . A szerkesztés: ① Vegyünk fel az e és f szárakon MA' és MB' szakaszokat úgy, hogy $\frac{MB'}{MA'} = \frac{a}{b}$. ② Húzzunk párhuzamost $A'B'$ -vel P -n át $\rightarrow A; B$. ③ $AMB \triangle \sim A'MB' \triangle$, mert szögek páronként egyenlők. $\frac{BM}{AM} = \frac{MB'}{MA'} = \frac{a}{b}$. Egyértelmű a megoldás.

1257. Adott: γ ; m_c ; $\frac{AT}{TB}$ arány, ahol T az m_c magasság talppontja. A szerkesztés: ① $A'T'$ és $T'B'$ szakasz felvétele egy egyenesen úgy, hogy $A'T' : T'B' = AT : TB$ legyen. ② T' -ben merőleges $A'B'$ -re: m' . ③ $A'B'$ γ szögű látószögbőve: k_γ . ④ $k_\gamma \cap m' = C' \Rightarrow C'T' = m'_c$. ⑤ Alkalmazzunk $A'B'C' \triangle$ -re $\frac{m_c}{m'_c}$ arányú hasonlóságot $\rightarrow ABC \triangle$. Megjegyzés: ha $AT : TB < 0$, akkor A' elválasztja T' -t és B' -t. Két egybevágó megoldás van.

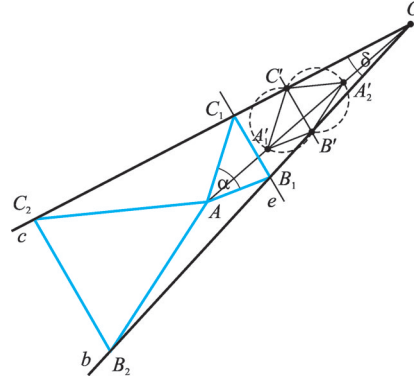
1258. Adott: $a + b - c$; α ; β . A szerkesztés: ① Szerkesszünk $A'B'C' \triangle$ -et α és β szögekkel! ② Adjuk meg az $(a' + b' - c')$ szakaszt! ③ Alkalmazzunk $A'B'C' \triangle$ -re $\frac{a + b - c}{a' + b' - c'}$ arányú hasonlóságot $\rightarrow ABC \triangle$. Egyértelmű a megoldás.

1259. Felhasználjuk: Az O középpontú hasonlóság az e -vel párhuzamos, szögcsúcsokat összekötő $A'C'$ -t vele párhuzamos szakaszba viszi, tehát teljesül az első feltétel. A fenti hasonlóság C' -t OC' egyenesére, tehát a δ szög egyik szárára, $A'-t$ a δ szög másik szárára viszi, tehát teljesül a második feltétel. $\lambda = \frac{OB}{OB'}$ miatt B' képe B . A szerkesztés: ① Szerkesszünk $A'B'C' \triangle$ -et a δ szög szárai közé úgy, hogy $A'C' \parallel e$, $B' \in OB$ és $C'A' = C'B'$ legyen! ② Alkalmazzunk O középpontú hasonlóságot az $A'B'C' \triangle$ -re úgy, hogy B' képe B legyen! $\rightarrow ABC \triangle$. Ha az $A'B'C'$ segédháromszöget úgy vesszük fel, hogy $C'A' \parallel e$ és $C'A' = A'B'$ legyen, akkor újabb két megoldást kaphatunk. 2; 3 vagy 4 megoldás lehet.

1260. Adott: A ; α ; δ ; e . Felhasználjuk: Az O középpontú hasonlóság $B'C'$ -t vele párhuzamos szakaszba viszi, tehát teljesül a $BC \parallel e$ feltétel. A fenti hasonlóság C' -t OC' egyenesére, tehát a δ szög egyik szárára, $B'-t$ a másik szárára viszi, tehát teljesül a $C \in c$ és $B \in b$ feltétel. $\lambda = \frac{OA}{OA'}$

miatt A' képe A . A szerkesztés: ① A szerkesztendővel hasonló $A'B'C'\Delta$ -et szerkesztünk: $a)$ e -vel párhuzamos $C'B'$ szakasz δ szárai között. $b)$ $C'D'$ α szögű látószögműve: k_α . $c)$ $k_\alpha \cap AO = A'$. ② $A'B'C'\Delta$ -et O középpontú hasonlóságnak vetjük alá úgy, hogy A' képe A legyen $\rightarrow ABC\Delta$. 1 vagy 2 megoldás lehet.

1260.



1261. Adott: γ ; $|a - c| = d$. Felhasználjuk: Ha $\gamma < 60^\circ$, akkor $a > c \Rightarrow d = a - c$. Ha $\gamma = 60^\circ$, akkor $a = c \Rightarrow d = 0$ kell legyen, csak ekkor szerkeszthető háromszög. Ha $\gamma > 60^\circ$, akkor $c > a \Rightarrow d = c - a$. A szerkesztés: ① γ szárszögű $A'B'C'\Delta$ -et szerkesztünk, alapja c' , szára a' . ② $d' = |a' - c'|$ szakasz felvétele.

③ Alkalmazzunk $\frac{d}{d'}$ arányú hasonlóságot $A'B'C'\Delta$ -re $\rightarrow ABC\Delta$. 0; 1 vagy végtelen sok megoldás lehet.

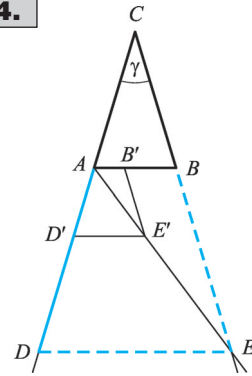
1262. A szerkesztés: ① $ABC\Delta$ -höz hasonló $A'B'C'\Delta$ -et szerkesztünk: $a)$ C csúcsú \perp felvétele. $b)$ $a \perp$ egyik szára tetszőleges CB' szakasz. $c)$ $a \perp$ felező félegyenese. $d)$ a szögfelezőre CB' -vel egyenlő szakasz felvétele $\rightarrow P'$. $e)$ $B'P'$ egyenesének és $a \perp$ másik szarának metszéspontja $A' \Rightarrow B'A' = c'$. ② Alkalmazzunk $\frac{c}{c'}$ arányú C középpontú hasonlóságot az $A'B'C'\Delta$ -re $\rightarrow ABC\Delta$. Egyértelmű a megoldás.

1263. A szerkesztés: ① $ABC\Delta$ -höz hasonló $A'B'C'\Delta$ -et szerkesztünk: $a)$ C csúcsú γ szög felvétele $\rightarrow e$; $b)$ e félegyenésre tetszőleges CA' szakasz. $c)$ γ szögfelezőjére CA' -vel egyenlő szakasz felvétele $\rightarrow P'$. $d)$ $A'P' \cap f = B' \Rightarrow A'B' = c'$.

② Alkalmazzunk C középpontú $\frac{c}{c'}$ arányú hasonlóságot $A'B'C'\Delta$ -re $\rightarrow ABC\Delta$. $\gamma \geq 120^\circ$ esetén nincs megoldás, $\gamma < 120^\circ$ esetén egyértelmű a megoldás.

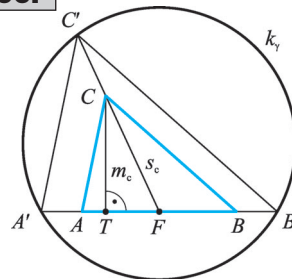
1264. A szerkesztés: ① Szerkesszünk az A csúcs-hoz egy, a feltételnek elegendő toldással hasonló $AD'E'B'$ trapéz, amelyre $AD' = D'E' = E'B'$. ② Alkalmazzunk olyan A középpontú hasonlóságot, melynek során E' képe a CB egyenesen van $\rightarrow D; E$. Ha $\gamma \geq 60^\circ$, akkor nincs megoldás.

1264.



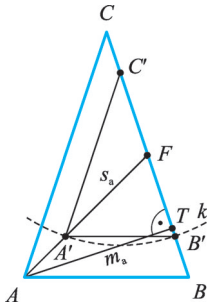
1265. Legyen $AC = BC$ és a BC oldal felezőpontja F . A szerkesztés: ① $ABC\Delta$ -höz hasonló $A'B'C'\Delta$ -et szerkesztünk: $a)$ F csúcsú φ szög felvétele $\rightarrow s$; $a)$ $b)$ F -ből tetszőleges egyenlő szakaszok felvétele a -ra $\rightarrow B'; C'$. $c)$ C' középpontú, $C'B'$ sugarú kör: k .

1266.



$d)$ $k \cap s = A' \Rightarrow A'F = s'_a$. ② F középpontú $\frac{s'_a}{s_a}$ arányú középpontos hasonlóság $A'B'C'\Delta$ -et $ABC\Delta$ -be viszi. Egyértelmű a megoldás.

1266. 1. eset: Ha $s_c > m_c$, akkor a szerkesztés: ① $CTF\Delta$ szerkesztése m_c és s_c felhasználásával. ② A szerkesztendőhöz hasonló $A'B'C'\Delta$ szerkesztése úgy, hogy F az $A'B'$ felezőpontja legyen: $a)$ F -ből tetszőleges egyenlő szakaszok felmérése FT egyenesre $\rightarrow A'; B'$. $b)$ $A'B'$ γ szögű látószögműve: k_γ .

1267.

c) $k_\gamma \cap e(F; C) = C'$. ③ F középpontú $\frac{m_c}{m'_c}$ arányú hasonlóság $A'B'C'\Delta$ -et

$ABC\Delta$ -be viszi. **2. eset:** Ha $s_c = m_c$, akkor a háromszög egyenlő szárú. 0 vagy 1 megoldás lehet.

1267. A szerkesztés: ① $ATF\Delta$ szerkesztése m_a , \sphericalangle és s_a felhasználásával. ② A szerkesztendőhöz hasonló $A'B'C'\Delta$ szerkesztése úgy, hogy F legyen a $B'C'$ szár felezéspontja: a) F -ből tetszőleges szakaszok felvétele FT egyenesére $\rightarrow B'$; C' . b) C' középpontú, $C'B'$ sugarú kör: k . c) $k \cap AF = A' \Rightarrow A'F = s'_a$. ③ F középpontú $\frac{s_a}{s'_a}$ arányú hasonlóság az $A'B'C'\Delta$ -et

az $ABC\Delta$ -be viszi. Ha $s_a < m_a$, akkor nincs megoldás. Ha $s_a = m_a$, akkor a háromszög szabályos. Ha $s_a > m_a$, akkor a háromszög egyenlő szárú, de nem szabályos.

1268. Az a); b); c); d); e) és f) feladatrészekben egy tetszőleges szög szárait párhuzamos egyenesek metszik. Alkalmazzuk rájuk a párhuzamos szelők tételét! a) $ab = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{b}$.

b) $\frac{1}{a} = x \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{a}{1}$. c) $\frac{a}{b} = x \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{b}{a}$, egyik szög száron b és a , másikon $1 \rightarrow x$.

d) $a^2 = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{a}$, egyik szög száron 1 és a , másikon $a \rightarrow x$. e) $\frac{ab}{c} = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{c}{b}$, egyik

szög száron c és b , másikon $a \rightarrow x$. f) $\frac{a^2}{b} = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{a}$, egyik szög száron b és a , másikon $a \rightarrow x$.

g) Alkalmazzuk a magasságtételt az $a + 1$ átfogójú derékszögű Δ -re. h) Alkalmazzuk a magasságtételt az $a + b$ átfogójú derékszögű Δ -re.

1269. Írjuk fel a háromszög területét háromféleképpen! $T = \frac{a \cdot m_a}{2} \Rightarrow m_a = \frac{2T}{a}$, hasonlóan $T = \frac{b \cdot m_b}{2} \Rightarrow m_b = \frac{2T}{b}$ és $T = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = \frac{2T}{c}$. $m_a : m_b : m_c = \frac{2T}{a} : \frac{2T}{b} : \frac{2T}{c} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

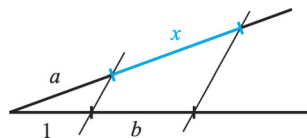
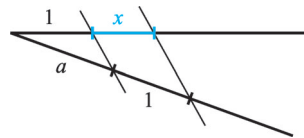
1270. Felhasználjuk az 1269. feladat állítását: $m_a : m_b : m_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. A szerkesztés: ①

$ABC\Delta$ -höz hasonló $A'B'C'\Delta$ szerkesztése: a) Tetszőleges $A'B' = c'$ szakasz felvétele. b) $\frac{1}{c'} : \frac{1}{a'} =$

$= m'_c : m'_a = m_c : m_a \Rightarrow \frac{m_c}{a'} = \frac{m_a}{c'} \rightarrow a'$ szakasz. c) $\frac{1}{c'} : \frac{1}{b'} = m'_c : m'_b = m_c : m_b \Rightarrow \frac{m_c}{b'} = \frac{m_b}{c'} \rightarrow$

$\rightarrow b'$ szakasz. d) $A'B'C'\Delta$ megszerkesztése a', b', c' szakaszokból $\rightarrow m'_a, m'_b, m'_c$. ② Alkalmaz-

zunk $\frac{m_c}{m'_c}$ arányú hasonlóságot $A'B'C'\Delta$ -re $\rightarrow ABC\Delta$. Nincs megoldás, ha $\frac{1}{m_a}, \frac{1}{m_b}, \frac{1}{m_c}$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

1268/I.**1268/II.**

1271. Az 1269. feladatból tudjuk, hogy $m_a : m_b : m_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \Rightarrow a : b : c = \frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b} : \frac{1}{m_c}$.

A szerkesztés: ① Tetszőleges K' szakaszt osszuk fel $\frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b} : \frac{1}{m_c}$ arányban $\rightarrow a', b', c'$ szakasz. ② Szerkesszünk háromszöget a', b', c' oldalakkal $\rightarrow A'B'C'\Delta$. ③ Adjuk meg $A'B'C'\Delta$ beírt körének sugarát: r'_0 . ④ Alkalmazzunk $\frac{r'_0}{r'}$ arányú hasonlóságot az $A'B'C'\Delta$ -re $\rightarrow ABC\Delta$.

Nincs megoldás, ha $\frac{1}{m_a}, \frac{1}{m_b}, \frac{1}{m_c}$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

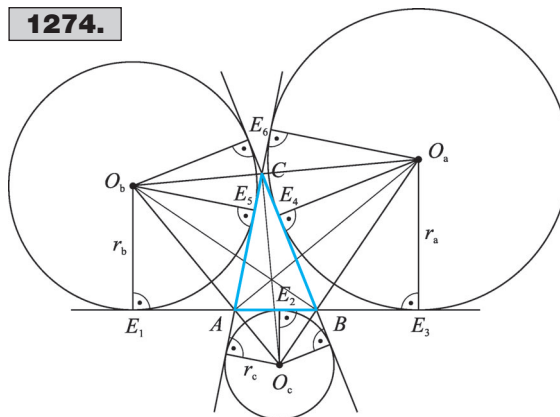
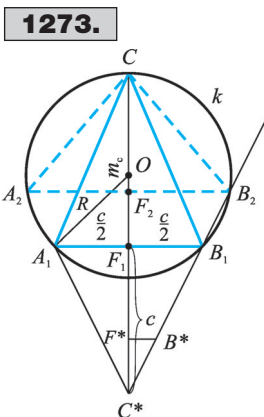
1272. Az 1269. feladatból tudjuk, hogy $m_a : m_b = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} \Rightarrow a : b = \frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b}$. A szerkesztés:

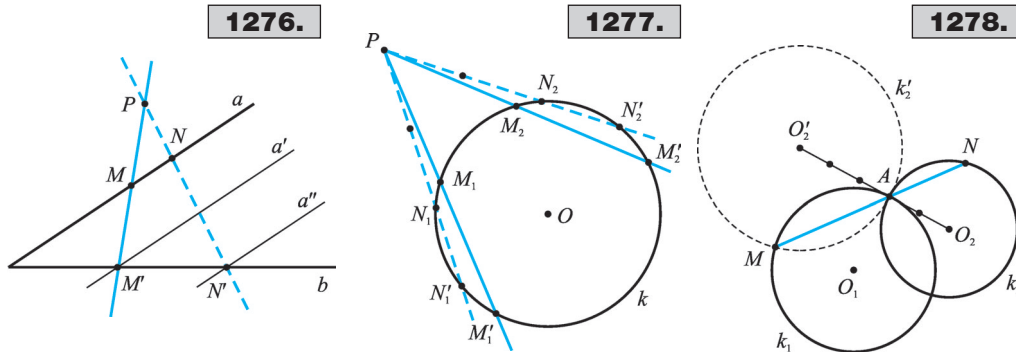
① Osszuk fel az $(a + b)$ szakaszt $\frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b}$ arányban $\rightarrow a, b$ szakasz. ② O középpontú, R sugarú kör: k . ③ k -ban közös C kezdőpontú a és b hosszúságú húrok felvétele $\rightarrow A$ és B . 0; 2 vagy 2-2 egybevágó megoldás lehet.

1273. A szerkesztés: ① O középpontú, R sugarú kör: k . ② Tetszőleges C pontból húzzunk átmérőt és mérjük rá az egyenesére a $(c + m_c)$ szakaszt $\rightarrow C^*$. ③ C^*FB derékszögű háromszögben $C^*F : FB = c : \frac{c}{2} = 2 : 1$, ezért $C^*F^*B^*$ derékszögű háromszög szerkesztése $C^*F^* : F^*B^* = 2 : 1$ arányú befogókkal. ④ C^* középpontú hasonlóságot alkalmazunk a $C^*F^*B^*\Delta$ -re úgy, hogy B^* képe a k körön legyen $\rightarrow B_1; B_2$. ⑤ B_1 -et, B_2 -t tükrözzük CC^* -ra $\rightarrow A_1; A_2$. 2 megoldás van, ha C^* a kör külső vagy belső pontja. 1 megoldás van, ha C^* a kör pontja.

1274. Felhasználjuk: Az $AE_2O_c\Delta \sim AE_1O_b\Delta$, mert mindkettő derékszögű és A -nál lévő szögeik csúcshögek. $AE_2 = s - b$; $AE_1 = s - c$, ahol $s = (a + b + c) : 2$. Ezt a hasonlóságnál felhasználva $\lambda = \frac{AE_2}{AE_1} = \frac{E_2O_c}{E_1O_b}$, azaz $\frac{s - b}{s - c} = \frac{r_c}{r_b}$. Hasonlóan belátható, hogy $\frac{s - b}{s - a} = \frac{r_a}{r_b}$ és $\frac{s - a}{s - c} = \frac{r_c}{r_a}$.

A szerkesztés: ① Felvesszünk egy tetszőleges $(s' - a')$ szakaszt. ② $\frac{r_b}{r_a} = \frac{s' - a'}{s' - b'}$ arányt felhasználva negyedik arányos szerkesztésével $(s' - b')$ megszerkesztése. ③ $s' - a' + s' - b' = c'$ oldal





a fenti két szakasz összege. ④ Hasonlóan juthatunk az a' és b' szakaszokhoz is. ⑤ $a'; b'; c' \rightarrow A'B'C'\Delta$. ⑥ $A'B'C'\Delta$ hasonló a szerkesztendőhöz, pl. $\frac{r_c}{r'_c}$ arányú középpontos hasonlósággal $ABC\Delta$ -höz jutunk. 0 vagy 1 megoldás lehet.

1275. Legyen az átlók metszéspontja M , az adott szögek $MCB \sphericalangle = \varphi$ és $MBC \sphericalangle = \varepsilon$. A szerkesztés: ① Szerkesszünk egy $M'B'C'\Delta$ -et $\varepsilon; \varphi$ szögekkel. ② $ABM\Delta \sim CDM\Delta$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda = \frac{a}{c} = \frac{BM}{DM} = \frac{AM}{CM} \Rightarrow DM = \frac{c}{a} \cdot BM$ és $AM = \frac{a}{c} \cdot CM$. ③ Alkalmazzunk B' -re M' középpontú $\left(-\frac{c}{a}\right)$ arányú hasonlóságot $\rightarrow D'$. ④ Alkalmazzunk C' -re M' középpontú $\left(-\frac{a}{c}\right)$ arányú hasonlóságot $\rightarrow A'$. ⑤ $A'B'C'D'$ trapéz hasonló a szerkesztendő trapézhoz, mert részháromszögek hasonlóak. ⑥ Alkalmazzunk $A'B'C'D'$ trapézra $\frac{c}{c'}$ arányú hasonlóságot $\rightarrow ABCD$ trapéz. Egyértelmű a megoldás.

1276. A szerkesztés: a) $PM = MM' \Rightarrow 2PM = PM'$. Alkalmazzunk P középpontú $\lambda_1 = 2$ arányú hasonlóságot a -ra $\rightarrow a'$. $a' \cap b = M'$, $M'P$ a keresett egyenes. b) $2PN = NN' \Rightarrow PN' = 3PN$. Alkalmazzunk P középpontú $\lambda_2 = 3$ arányú hasonlóságot a -ra $\rightarrow a''$. $a'' \cap b = N'$, $N'P$ a keresett egyenes. Egyértelmű a megoldás.

1277. A szerkesztés: a) $PM = MM' \Rightarrow 2PM = PM'$. Alkalmazzunk a k körre P középpontú $\lambda_1 = 2$ arányú hasonlóságot $\rightarrow k'$. $k' \cap k = M'$, $M'P$ egyenes a keresett szelő. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet. b) $PN = 2NN' \Rightarrow PN' = \frac{3}{2}PN$. Alkalmazzunk a k körre P középpontú $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ arányú hasonlóságot $\rightarrow k''$. $k'' \cap k = N'$, $N'P$ egyenes a keresett szelő. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1278. 1. eset: 3 egységnyi húr a k_1 körben, 2 egységnyi húr a k_2 -ben, A elválasztja M -et és N -et. $MA : AN = 3 : 2 \Rightarrow AM = \frac{3}{2}AN$. A szerkesztés: ① Alkalmazzunk A középpontú $\lambda = -\frac{3}{2}$ arányú hasonlóságot a k_2 körre $\rightarrow k'_2$. ② $k'_2 \cap k_1 = M$. ③ MA egyenes metszi ki a körökből a keresett húrokat.

2. eset: 2 egységnyi húr a k_1 körben, 3 egységnyi húr a k_2 -ben, A elválasztja M -et és N -et. $MA : AN = 2 : 3 \Rightarrow AM = \frac{2}{3}AN \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$.

3. eset: 3 egységnyi húr a k_1 körben, 2 egységnyi húr a k_2 -ben, A nem választja el M -et és N -et.

$$MA : AN = 3 : 2 \Rightarrow AM = \frac{3}{2}AN \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}.$$

4. eset: 2 egységnyi húr a k_1 körben, 3 egységnyi húr a k_2 -ben, A nem választja el M -et és N -et.

$$MA : AN = 2 : 3 \Rightarrow AM = \frac{2}{3}AN \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}. \text{ 4 megoldás van.}$$

1279. Adott: k ; OA ; OB . A szerkesztés: ① Osszuk fel az AB szakaszt három egyenlő részre $\rightarrow H_1; H_2$. ② Alkalmazzunk O középpontú hasonlóságot az AB húrra úgy, hogy H_1 és H_2 képe a körvonalon legyen. ③ $A'A = B'B$ -vel kell meghosszabbítani az r_1 és r_2 sugarakat. Megjegyzés: ha AB átmérő, akkor mindkét irányban saját hosszával kell meghosszabbítani, hogy a feltételnek eleget tevő szelőhöz jussunk. Egyértelmű a megoldás.

1280. Adott: k ; OA ; OB . A szerkesztés: ① Hosszabbítsuk meg az AB húrt saját hosszával mindkét irányban $\rightarrow C$ és D . ② $OC \cap k = C'$ és $OD \cap k = D'$. ③ O középpontú $\frac{OC'}{OC}$ arányú

hasonlóság DC -t a vele párhuzamos $D'C'$ -be viszi, és a középpontos hasonlóság aránytartása miatt $D'A' = A'B' = B'C'$. Ha AB átmérő, akkor nincs megoldás, egyébként egyértelmű a $C'D'$ húr.

1281. Felhasználjuk: $BOA \sphericalangle = AOP \sphericalangle \Rightarrow OA$ szögfelező a $BOP\Delta$ -ben. A szögfelezőtétel

$$\text{miatt } BA : AP = OB : OP, \text{ azaz } BA : AP = r : p \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{BA + AP}{AP} = \frac{BA}{AP} + 1 = \frac{r}{p} + 1 = \frac{r+p}{p}.$$

A szerkesztés: ① Alkalmazzunk P középpontú $\frac{r+p}{p}$ arányú hasonlóságot a k körre $\rightarrow k'$.

② $k' \cap k = B$. ③ BP a keresett szelő. 2 megoldás van.

1282. Felhasználjuk: l_i kör E_i középpontú hasonlósággal k_1 körbe vihető. Ekkor L_i képe O_1 ; P képe A_i és $L_i P \parallel O_1 A_i$, valamint O_2 ; P és L_i egy egyenesen vannak. A szerkesztés: ① O_1 -en át párhuzamos $O_2 P$ -vel $\rightarrow g$. ② $g \cap k_1 = \{A_1; A_2\}$. ③ $A_i P \cap k_1 = E_i$. ④ $E_i O_1 \cap O_2 P = L_i$. ⑤ L_i középpontú, $L_i P$ sugarú kör $\rightarrow l_i$. Két megoldás van.

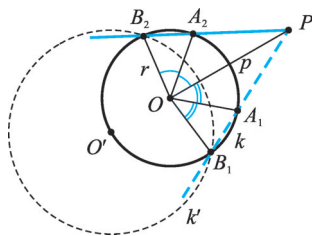
1283. Adott: A ; c ; s ; C ($A \in c$ és $A \in s$). Felhasználjuk: $CF = FB \Rightarrow CB = 2CF$. A szerkesztés: ① Alkalmazzunk C középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonlóságot s -re $\rightarrow s'$. ② $s' \cap c = B$. Egyértelmű a megoldás.

1284. Adott: A ; B ; s ; γ ($A \in s$). Felhasználjuk: $BF = FC \Rightarrow BC = 2BF$. A szerkesztés: ① AB γ szögű látószögmérvő: k . ② B középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonlóság s egyenesre $\rightarrow s'$. ③ $s' \cap k = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

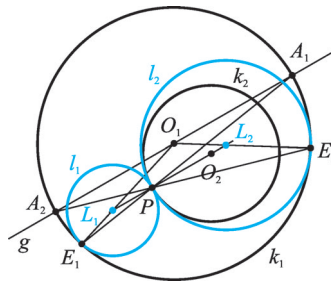
1285. Az $ABC\Delta$ S súlypontja a C pont F középpontú $\lambda = \frac{1}{3}$ arányú kicsinyített képe, ahol F

az AB felezőpontja. Az AB fölé rajzolt háromszögek súlypontjai a k kör F középpontú $\lambda = \frac{1}{3}$

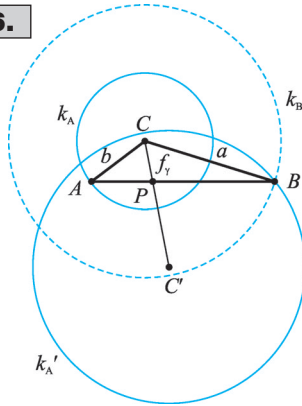
1281.



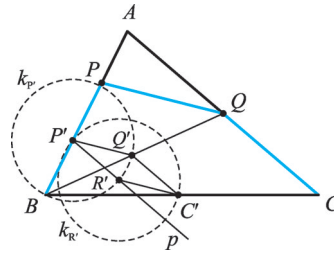
1282.



1286.



1287.



arányú k' kicsinyített képén vannak rajta. A k' kör A' -től és B' -től különböző minden S pontja megfelel egy k körülírt körű $ABC\Delta$ -nek, hiszen F középpontú $\lambda' = 3$ arányú hasonlósággal S pont képe k -ra kerül. A keresett ponthalmaz tehát a k' kör az AB húrra eső A' és B' pontok kivételével.

1286. Felhasználjuk: A szögfelezőtétel szerint $PA : PB = b : a \Rightarrow PB = \frac{a}{b} \cdot PA$. A szerkesztés:

① $CP = f_\gamma$ szakasz felvétele. ② C középpontú, a sugarú kör: k_B . C középpontú, b sugarú kör: k_A . ③ Alkalmazzunk P középpontú $\lambda = -\frac{a}{b}$ arányú hasonlóságot a k_A körre. Ennél a hasonlóságnál A képe B , így $A \in k_A$ -ból $B \in k_A'$ következik. ④ $k_A' \cap k_B = B$. ⑤ $BP \cap k_A = A$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1287. Induljunk ki a kész ábrából! Jelölje $P \in AB$ az első, $Q \in AC$ a második elágazást! A feltevél szerint $BP = PQ = QC$. Induljunk ki a szerkesztendőhöz hasonló $BP'Q'C'$ töröttvonalból! Húzzunk párhuzamost P' -n át $Q'C'$ -vel, azaz AC -vel és vegyünk fel rajta $P'R' = Q'C' (= P'Q' = P'B)$ szakaszt. Ekkor $P'R'C'Q'$ rombuszhoz jutunk. A $BP'R'C'$ töröttvonal megszerkeszthető: ① P' -n át párhuzamost húzunk AC -vel $\rightarrow p$. ② P' középpontú, $P'B$ sugarú kör: k_P . ③ $k_P \cap p = R'$. ④ R' középpontú, $P'B$ sugarú kör: k_R . ⑤ $k_R \cap BC = C'$. ⑥ P' -n át párhuzamos $R'C'$ -vel, majd ennek k_P -vel való metszete Q' . ⑦ B középpontú hasonlóságot alkalmazunk a $BP'Q'C'$ töröttvonalra úgy, hogy Q' képe AC -n legyen. B helyzeté miatt P' képe P AB -n lesz, $Q'C' \parallel AC$ miatt C' képe C lesz, és a hasonlóság aránytartása miatt $BP = PQ = QC$. Egyértelmű a megoldás.

1288. a) Felhasználjuk: F felezi BC -t, ezért a B középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonlóságnál F képe C . A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz felvétele. ② AB γ szögű látószögműve: k_γ . ③ A középpontú, s_a sugarú kör: k_A . ④ k_A kör B középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonló képe: k_A' . ⑤ $k_A' \cap k_\gamma = C$. 0 vagy 2 egybevágó megoldás lehet.

b) Felhasználjuk: F felezi BC -t, ezért a B középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlóságnál C képe F .

A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz felvétele. ② A -ban α szög felvétele AB -re $\rightarrow e$. ③ B középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlóságnál e képe e' . ④ A középpontú, s_a sugarú kör: k_A . ⑤ $k_A \cap e' = F$.

⑥ B -t tükrözzük F -re: C . Egyértelmű a megoldás, ha $s_a > c/2$. 0; 1 vagy 2 megoldást kaphatunk, ha $s_a < c/2$. Nincs megoldás, ha $s_a = c/2$.

c) Felhasználjuk: B_1 pontból az AB szakasz 90° alatt látszik, tehát B_1 rajta van az AB Thalész körén. F felezi BC -t, ezért a B középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlóságnál C képe F . A szerkesztés:

köröknek E_2 -ben közös az érintője: e_2 . Olyan köröket keresünk, amelyek az e_1 egyenest az E_1 pontban, az e_2 egyenest az E_2 pontban érintik, és a sugaruk egyenlő. Ennek a problémának a megoldása az 1290. feladatban megtalálható.

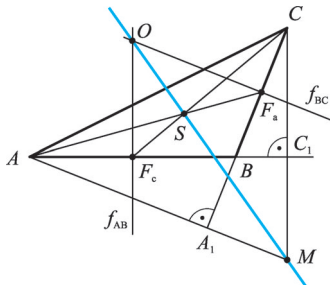
2. eset: O_1, E_1, O_2, E_2 egy egyenesen vannak. E_1E_2 szakasz E_1 -hez, illetve E_2 -höz közelebbi negyedelőpontjai adják a keresett körök középpontját. Egyértelmű a megoldás.

Euler-egyenes, Feuerbach-kör, Simson-egyenes, Apolloniusz-kör

1292. Legyen F_a a BC , F_b az AC és F_c az AB oldal felezéspontja. $ABC\Delta \sim F_aF_bF_c\Delta$, mert oldaluk páronként párhuzamosak, szögeik váltószögek, $\lambda = 2$. CF_c, AF_a, BF_b a háromszög súlyvonalai,

melyek az S súlypontban metszik egymást. Az S középpontú $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság C -t F_c -be, B -t F_b -be, A -t F_a -ba viszi, mivel a súlypont a súlyvonal csúcsától távolabbi harmadolópontja. Tehát a hasonlóság középpontja a súlypont.

1293/I.

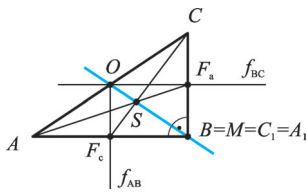


1293. Tekintsük az S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú kö-

zéppontos hasonlóságot! Mivel a súlypont a súlyvonal csúcsától távolabbi harmadolópontja, a fenti hasonlóságnál: F_c képe C ; F_c -n átmenő, AB -re merőleges f_{AB} képe C -n átmenő, vele párhuzamos, tehát AB -re merőleges egyenes: CC_1 . F_a képe A ; F_a -n átmenő, CB -re merőleges f_{CB} képe A -n átmenő, vele párhuzamos, tehát CB -re merőleges egyenes: AA_1 . A fentiekből következik, hogy $f_{AB} \cap f_{CB} = O$; az O képe

$e(C; C_1) \cap e(A; A_1) = M$. Ha az S középpontú $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság O -t M -be viszi, akkor $S \in OM$ és $2OS = OM$.

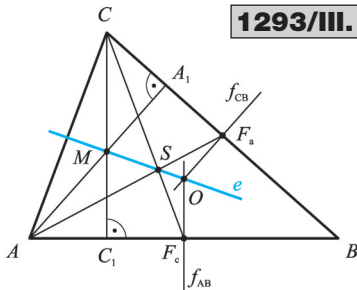
1293/II.



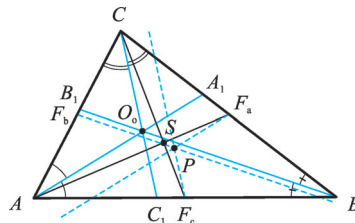
1294. Tekintsük az S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú kö-

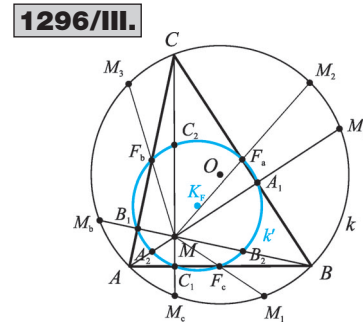
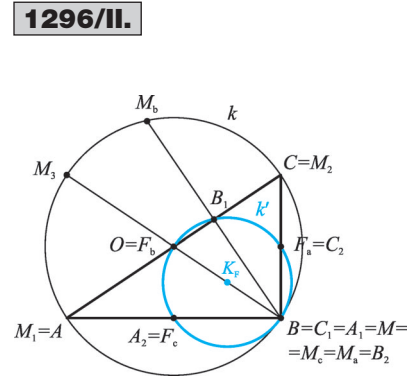
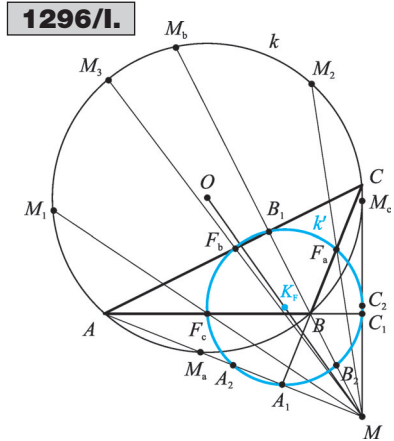
zéppontos hasonlóságot! Mivel a súlypont a súlyvonal csúcsától távolabbi harmadolópontja, a fenti hasonlóságnál C képe F_c ; a C -n átmenő CC_1 szögfelező képe az F_c -n átmenő, CC_1 -gyel párhuzamos egyenes. Hasonlóan megmutatható, hogy BB_1 képe az F_b -n átmenő, BB_1 -gyel párhuzamos egyenes, AA_1 képe az F_a -n átmenő, AA_1 -gyel párhuzamos egyenes. Az egy ponton átmenő egyenesek képei is egy ponton mennek át, így az egymást O_0 -ban metsző AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek képei is, ami a bizonyítandó állítás volt.

1293/III.



1294.





1295. Felhasználjuk: A súlypont a súlyvonal csúcsból távolabbi harmadolópontja. A súlypont az MO szakasz O -hoz közelebbi harmadolópontja (M magasságpont, O a körülírt kör középpontja) \rightarrow lásd az 1293. feladatot az Euler-egyenesről. A szerkesztés: ① Alkalmazzuk az S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! M képe O ; A képe F_a . ② AM egyenes az A -ból induló magasságvonal. ③ F_a -ból merőlegest állítunk AM egyenesre: a oldal egyenese, f . ④ O középpontú, OA sugarú kör a háromszög körülírt köre: k . ⑤ $k \cap f = \{ C; B \}$. 0 vagy 1 megoldás van.

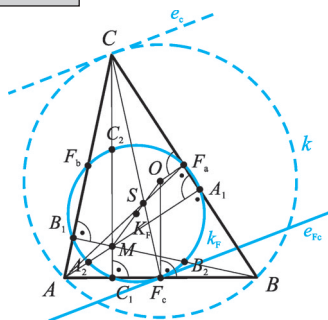
1296. Felhasználjuk: A magasságpont oldalegyenesekre vonatkozó tükörképe a háromszög körülírt körén van. A magasságpont oldalfelezéspontokra vonatkozó tükörképe a háromszög körülírt körén van. Alkalmazzunk M középpontú, $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot!

C_1 felezi M_cM -et, tehát M_c képe C_1 . A_1 felezi M_aM -et, tehát M_a képe A_1 . B_1 felezi M_bM -et, tehát M_b képe B_1 . F_b felezi M_3M -et, tehát M_3 képe F_b . F_c felezi M_1M -et, tehát M_1 képe F_c . F_a felezi M_2M -et, tehát M_2 képe F_a . $C_1, A_1, B_1, F_b, F_c, F_a$ rajta vannak a k körülírt kör k' képén, melynek sugara $\frac{1}{2}R$, középpontja pedig az MO szakasz felezéspontja. Ugyanezen a körön vannak a feles kicsinyítés miatt a CM szakasz C_2 , az AM szakasz A_2 és BM szakasz B_2 felezéspontjai is. Megjegyzés: a Feuerbach-kör középpontja MO felezéspontja, ezért rajta van a háromszög Euler-egyenesén.

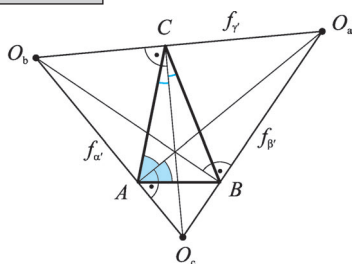
1297. A szóban forgó négy háromszög: $ABM\Delta, BCM\Delta, CAM\Delta, ABC\Delta$. A négy háromszög magasságtalppontjai megegyeznek: $A_1; B_1; C_1$. Három nem egy egyenesen lévő pont egyértelműen meghatározza a saját körét, így a fenti talppontok is a háromszögek Feuerbach körét (lásd az 1296. feladatot). Tehát az állítás igaz.

1298. A Feuerbach-kör középpontja rajta van a háromszög Euler egyenesén (MO felezéspontja), és a négy háromszög Feuerbach köre megegyezik. \Rightarrow A négy háromszög Euler egyenesi egy ponton mennek át, a közös Feuerbach-kör középpontján.

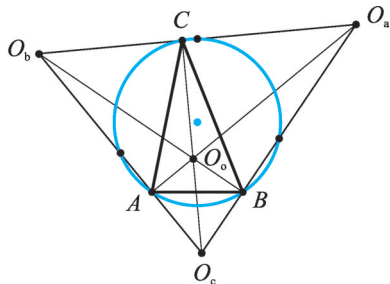
1299.



1300.



1301.



1302. Az 1300. feladatban láttuk, hogy az $O_a O_b O_c \Delta$ Feuerbach köre az $ABC \Delta$ körülírt köre. Az $ABC \Delta$ belső szögfelezői az $O_a O_b O_c \Delta$ magasságvonalai. Az $O_a O_b O_c \Delta$ -ben tehát K a körülírt kör középpontja, O a Feuerbach-kör középpontja, O_0 a magasságpontja. Az 1296. feladatban láttuk, hogy a Feuerbach-kör középpontja felezi a magasságpont és a körülírt kör középpontja közti szakaszt, azaz O felezi KO_0 -t, tehát K , O_0 és O egy egyenesen vannak. Megjegyzés: ez az egyenes az $O_a O_b O_c \Delta$ Euler egyenese.

1303. Felhasználjuk: Az $O_a O_b O_c \Delta$ magasságvonalai az $ABC \Delta$ belső szögfelezői; A , B és C a magasságtalppontok. O_0 az $O_a O_b O_c \Delta$ magasságpontja. A szerkesztés: ① Az O_a , O_b , O_c , O_0 pontok által meghatározott háromszögek közül bármelyiknek a kimaradó negyedik csúcs a magasságpontja. Eszerint bármely három ismeretében a negyedik megadható. ② $O_a O_b O_c \Delta$ magasságtalppontjai A , B , és C . 0 vagy 1 megoldás lehet.

1299. Az 1293. feladatban láttuk, hogy az S súlypont az MO szakasznak $2:1$ arányú osztópontja. $\Rightarrow \Rightarrow SO = \frac{1}{3} MO$. Az 1296. feladatban láttuk, hogy a Feuerbach-kör K_F középpontja felezi az MO szakaszt. $\Rightarrow \Rightarrow K_F O = \frac{1}{2} MO$. Az aláhúzottakból következik, hogy $K_F S = K_F O - SO = \frac{1}{2} MO - \frac{1}{3} MO = \frac{1}{6} MO$, vagyis S a $K_F O$ szakasz $1:2$ arányú osztópontja. Alkalmazzunk S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! Ennek során O képe K_F , k képe k_F , C képe F_c , e_c képe e_{F_c} . Ha e_c érinti k -t C -ben, akkor e_{F_c} érinti k_F -et F_c -ben. A középpontos hasonlóságnál a középponton át nem menő egyenes és képe párhuzamosak, tehát $e_c \parallel e_{F_c}$.

1300. Felhasználjuk: A hozzáírt kör középpontja két külső és egy belső szögfelező metszéspontja. A háromszög ugyanazon csúchoz tartozó külső és belső szögfelezője merőleges egymásra. Az $ABC \Delta$ belső szögfelezői az $O_a O_b O_c \Delta$ magasságvonalai; A , B és C a magasságtalppontok. Az 1296. feladat szerint a magasságtalppontok az ún. Feuerbach-körön vannak, ami a háromszög körülírt körének feles kicsinyítése. Az $ABC \Delta$ körülírt köre az $O_a O_b O_c \Delta$ Feuerbach köre, tehát valóban igaz, hogy $O_a O_b O_c \Delta$ körülírt körének sugara kétszerese az $ABC \Delta$ köré írt kör sugarának.

1301. Az 1300. feladatban láttuk, hogy az $O_a O_b O_c \Delta$ Feuerbach köre az $ABC \Delta$ körülírt köre. A , B , C pontok a Feuerbach-kör 9 pontja közül a magasságtalppontok. Rajtuk kívül rajta vannak az $O_a O_b O_c \Delta$ oldalfelezéspontjai is, tehát igaz, hogy az $ABC \Delta$ körülírt köre felezi az $O_a O_b O_c \Delta$ oldalait (átmegy annak felezéspontjain). A beírt kör középpontját bármelyik hozzáírt kör középpontjával összekötő szakasz felezőpontja is a körülírt körön van. Így az $O_a O_b O_c \Delta$ Feuerbach-körének mind a kilenc kitéüntetett pontját megkaptuk.

1304. a) Felhasználjuk: Az $ABC\Delta$ körülírt köre az $O_aO_bO_c\Delta$ Feuerbach köre, ezért átmegy az $O_aO_bO_c\Delta$ oldalfelezéspontjain és magasságtalppontjain. Az $ABC\Delta$ belső szögfelezői az $O_aO_bO_c\Delta$ magasságvonalai, A , B és C a magasságtalppontok. A szerkesztés: ① O_aO_c szakasz felezéspontja: F . ② O középpontú, OF sugarú kör: k ($ABC\Delta$ körülírt köre vagy az $O_aO_bO_c\Delta$ Feuerbach köre). ③ $k \cap e(O_a; O_c) = B$ (magasságtalppont $e(O_a; O_c)$ -n). ④ O_aO_c Thalész köre: k_T . ⑤ $k_T \cap k = \{A; C\}$ (magasságtalppontok $e(O_b; O_c)$ -n, ill. $e(O_b; O_a)$ -n). 0 vagy 1 megoldás lehet.

b) Felhasználjuk: Az $ABC\Delta$ körülírt köre az $O_aO_bO_c\Delta$ Feuerbach köre. Az $ABC\Delta$ belső szögfelezői az $O_aO_bO_c\Delta$ magasságvonalai, A , B és C a magasságtalppontok. A magasságpont és egy csúc közötti szakasz felezéspontja rajta van a Feuerbach-körön. A szerkesztés: ① O_aO_c szakasz felezéspontja: F . ② O középpontú, OF sugarú kör: k . ③ O_aO_c Thalész köre: k_T . ④ $k_T \cap k = \{A; B\}$. ⑤ $k \cap e(O_b; O_c) = C$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

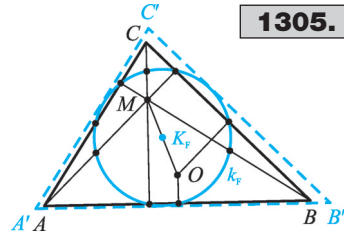
1305. Legyen r_0 az $ABC\Delta$ beírt körének, r_F a Feuerbach körének, R a körülírt körének sugara! Nagyítsuk fel úgy az $ABC\Delta$ -et, hogy oldalai érintsék az $ABC\Delta$ Feuerbach körét $\rightarrow A'B'C'\Delta$. Nagyításról lévén szó $r_0 \leq r'_0$, $r_F \leq r'_F$ és $R \leq R'$. Az $ABC\Delta$ Feuerbach köre az $A'B'C'\Delta$ beírt köre,

és az 1296. feladatban láttuk, hogy $r_F = \frac{R}{2}$, ezért $r_0 \leq r'_0 =$

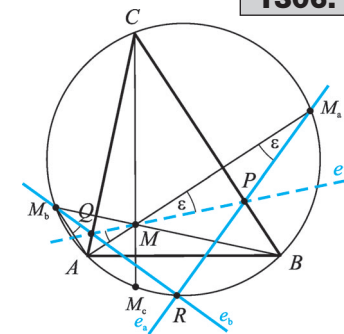
$$= r_F = \frac{R}{2} \Rightarrow r_0 \leq \frac{R}{2}.$$

1306. Felhasználjuk: A magasságpont oldalegyenesekre vonatkozó tükröképe a háromszög körülírt körén van. Elég belátni, hogy bármely két tükrökép metszéspontja a körülírt körön van, hiszen a tükrökép egyenesnek a körrel való egyik metszéspontja a magasságpont megfelelő tükröképe, másik metszéspont pedig csak egy van, így nem lehet az egyik tükröképpel a kör egyik, a másik tükröképpel a kör másik pontja. Legyen $e \cap e(C; B) = P$ és $e \cap e(C; A) = Q$, az e tükröképei e_a és e_b . A tükrözés miatt $M_aMP \sphericalangle = MM_aP \sphericalangle = \varepsilon$. $QMA \sphericalangle$ és $M_aMP \sphericalangle$ csúcsszögek, így $QMA \sphericalangle = \varepsilon$. A tükrözés miatt $QMA \sphericalangle = QM_bA \sphericalangle = \varepsilon$. Legyen $e_a \cap e_b = R$: $AM_bR \sphericalangle = AM_aR \sphericalangle = \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy AR az M_a és M_b pontokból egyenlő szögek alatt látszik. $\Rightarrow M_a$ és M_b rajta vannak AR látószöggörvén. Mivel A , M_a és M_b meghatározzák a kört, az $ABC\Delta$ körülírt körét, így R is ezen a körön van. $\Rightarrow e_a$ és e_b a körülírt körön metszik egymást. Megjegyzés: általában igaz, hogy A , M_a , R és M_b egy körön vannak, mert vagy $AM_bR \sphericalangle = AM_aR \sphericalangle$, vagy $AM_bR \sphericalangle + AM_aR \sphericalangle = 180^\circ$.

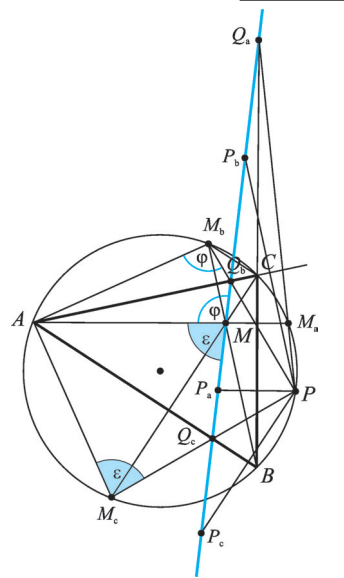
1307. M magasságpont tükröképei az oldalegyenesekre $M_a; M_b; M_c$, amelyek az $ABC\Delta$ körülírt körén találhatóak. P tükröképei az oldalegyenesekre $P_a; P_b; P_c$. PM_b egyenesnek az AC egyenesre vonatkozó tükröképe P_bM , ezért e két egyenes az AC egyenesen metszi egymást. \Rightarrow



1305.



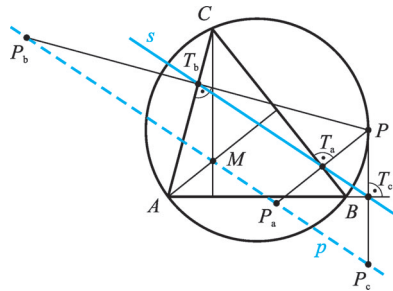
1306.



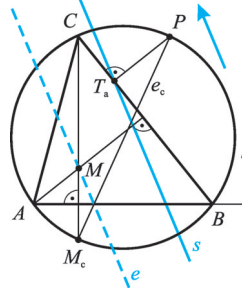
1307.



1308.



1309.



$\Rightarrow PM_b \cap AC = Q_b$, e két egyenesnek a tükörtengelyen levő metszéspontja $\Rightarrow P_b \in e(M; Q_b)$. Hasonlóan megmutatható, hogy $P_c \in e(M; Q_c)$. A tengelyes szimmetria miatt $Q_b M_b A \sphericalangle = Q_b M A \sphericalangle = \varphi$, valamint $Q_c M_c A \sphericalangle = Q_c M A \sphericalangle = \varepsilon$. $PM_b AM_c$ húrnégyszög, ezért $\varphi + \varepsilon = 180^\circ \Rightarrow Q_c; M; Q_b$ egy egyenesen vannak $\Rightarrow P_c; M; P_b$ egy egyenesen vannak. Hasonlóan igazolható, hogy a PM_a és BC egyenesek Q_a metszéspontja és egyúttal a P_a tükörkép is az M ponton átmenő $P_c M P_b$ egyenesre illeszkedik.

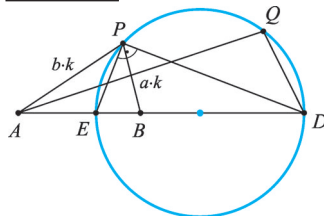
1308. Az 1307. feladatban láttuk, hogy a P pontnak a, b és c oldalegyenesekre vonatkozó P_a, P_b, P_c tükörképei magasságponton átmenő egyenesen vannak. A tükrözésnél a tükörtengely merőlegesen felezi a pontot a képével összekötő szakaszt, így $PP_a = 2PT_a; PP_b = 2PT_b$ és $PP_c = 2PT_c$ miatt a P középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság P_a -t T_a -ba, P_b -t T_b -be és P_c -t

T_c -be viszi. Mivel P_a, P_b és P_c egy egyenesen voltak, így a képek is egy egyenesen lesznek, még hozzá az M -en átmenő egyenes P középpontú feles kicsinyített képén.

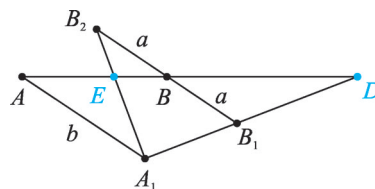
1309. Felhasználjuk: A magasságponton átmenő egyenes oldalegyenesekre vonatkozó tükörképei a körülírt kör egy pontjában metszik egymást. A körülírt kör P pontjából az oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak, ami párhuzamos a P -hez tartozó M -en átmenő egyenessel. A szerkesztés: ① M -en át párhuzamos az adott iránnyal: e . ② e -t tükrözzük a c oldalegyenesre: e_c . ③ $e_c \cap k = P$. ④ P -ből merőlegest állítunk CB -re $\rightarrow T_a$. ⑤ T_a -n át párhuzamos e -vel: s . A fentiek miatt s az $ABC\Delta$ adott irányú Simson egyenese.

1310. Tegyük fel, hogy a P pont megfelel a feltételeknek: $PA : PB = \frac{b}{a}$, ami egy 1-től különböző állandó. A belső szögfelezőre vonatkozó tétel miatt $AE : EB = b : a$, a külső szögfelezőre vonatkozó tétel miatt $AD : DB = b : a$. Az egy csúcsból induló belső és külső szögfelező merőleges egymásra, tehát $EPD \sphericalangle = 90^\circ \Rightarrow P$ rajta van az ED szakasz Thalész körén. Az ED átmérőjű kör minden pontja megfelelő. Legyen Q a Thalész-kör egy tetszőleges pontja. Szerkesztjük meg az $XY = \frac{a}{b} \cdot AQ$ szakaszt. Ha AB, AQ és XY szakaszokból lehet háromszöget szerkeszteni,

1310/I.



1310/II.



akkor készen vagyunk, mert vagy az $AQB\Delta$ -ról, vagy ennek AB -re vonatkozó tengelyes tükröképéről van szó. Meg kell tehát mutatni, hogy $\frac{a}{b} \cdot AQ + AQ > AB$ és $\left| \frac{a}{b} \cdot AQ - AQ \right| < AB$.

Az A középpontú, AE sugarú kör E -ben érinti a Thalész-kört, ezért a Thalész-kör minden pontja külső pont az A középpontú, AE sugarú körben. Tehát $AQ > AE$ és $XY > \frac{a}{b} \cdot AE = BE$. Így $AQ + XY > AE + EB = AB$. Az A középpontú, AD sugarú kört a Thalész-kör belülről érinti. Így $AQ < AD$ és $XY < \frac{a}{b} \cdot AD = BD$, ezért $XY - AQ < |BD - AD| = AB$. Az E és D pontok meg-

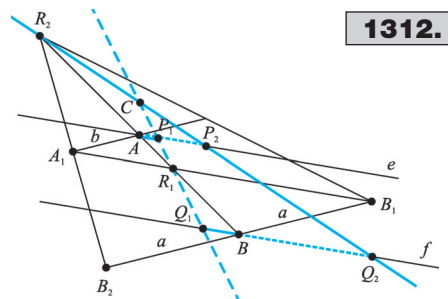
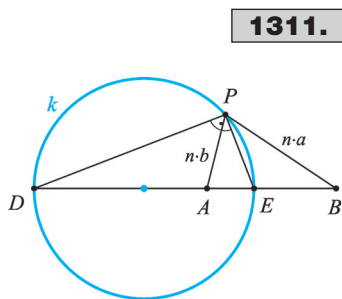
szerkeszthetők AB és $\frac{a}{b}$ ismeretében: $AA_1 \parallel BB_1$ (párhuzamos szelőszakaszok tétele az $A_1DA \sphericalangle$ -re) $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{AD}{DB} \rightarrow D$. $AA_1 \uparrow BB_2$ (párhuzamos szelőszakaszok tétele az $A_1EA \sphericalangle$ -re) $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{AE}{EB} \rightarrow E$.

1311. Legyen a két adott szakasz hossza a és b . **1. eset:** $a \neq b$. Felhasználjuk: A keresett pontok az AB szakasz $\frac{b}{a}$ arányú Apollonius körén vannak, melynek átmérője a DE szakasz (D az AB szakasz $b:a$ arányú külső osztópontja, E az AB szakasz $b:a$ arányú belső osztópontja) (lásd 1310. feladat). ① Szerkesszünk háromszöget AB , $n \cdot a$, $n \cdot b$ szakaszokból, ahol n olyan alkalmas pozitív valós szám, hogy a három szakaszra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség $\rightarrow ABP\Delta$. ② $ABP\Delta$ P -hez tartozó belső és külső szögfelezője. ③ A két szögfelező és az AB egyenes metszéspontja: D és E . ④ DE átmérőjű kör: k . Bármely $P \in k$ esetén $PA:PB = b:a$. **2. eset:** Ha $a = b$, akkor az AB szakasz felezőmerőlegese a megoldás.

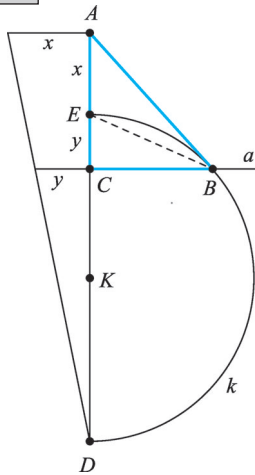
1312. Tegyük fel, hogy az e egyenes elválasztja C -t és B -t! $AP:BQ = b:a$ kell legyen a feltétel szerint. **1. eset:** $e(C; P_1) \cap e(A; B) = R_1$. $AR_1P_1\Delta \sim BR_1Q_1\Delta$, mert szögeik csúcshögek, illetve váltószögek. $\lambda = \frac{AP_1}{Q_1B} = \frac{AR_1}{R_1B} = \frac{b}{a} \Rightarrow R_1$ az AB szakasz $b:a$ arányú osztópontja és CR_1 a szerkesztendő egyenes.

2. eset: $e(C; P_2) \cap e(A; B) = R_2$. $AR_2P_2\Delta \sim BR_2Q_2\Delta$, mert egy szögük közös, a másik egyállású.

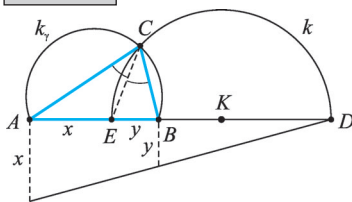
$\lambda = \frac{AP_2}{Q_2B} = \frac{AR_2}{R_2B} = \frac{b}{a} \Rightarrow R_2$ az AB szakasz $b:a$ arányú külső osztópontja és CR_2 a szerkesztendő egyenes. A szerkesztés: ① A -n át $AA_1 = b$. ② B -n át párhuzamos AA_1 -gyel és ezen ellentétes irányban $BB_1 = a$, $BB_2 = a$. $e(A_1; B_1) \cap e(A; B) = R_1$ és $e(A_1; B_2) \cap e(A; B) = R_2$. ③ $e(C; R_1) \cap e = P_1$ és $e(C; R_2) \cap e = Q_1$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.



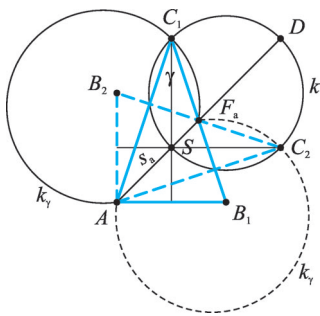
1313.



1314.



1315.



1313. Adottak az $x; y$ szeletek, amelyeket β szögfelezője vág ki az AC befogóból. A szerkesztés: ① $AC = x + y$ hosszú szakasz E osztóponttal, AC szakasz $x : y$ arányú Apollonius köre: k (lásd az ábrán, illetve az 1311. feladatnál). ② C -ben merőleges AC -re: a . ③ $a \cap k = B$. Ha $x \neq y$, akkor két, az AC egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van. Ha $x = y$, akkor nincs megoldás.

1314. A szerkesztés: **1. eset:** $x \neq y$. ① AB γ szögű látószögműve: k_γ . ② AB szakasz $x : y$ arányú Apollonius köre: k . (lásd az ábrán, illetve az 1311. feladatnál). ③ $k_\gamma \cap k = C$. **2. eset:** $x = y$. ① AB γ szögű látószögműve: k_γ . ② AB szakasz felezőmerőlegese: f_{AB} . ③ $k_\gamma \cap f_{AB} = C$. Két, az AB egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van.

1315. Felhasználjuk: S a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. CS szögfelező az $AF_a C \Delta$ -ben, ezért C rajta van az AF_a szakasz $2 : 1$ arányú Apollonius körén. A szerkesztés: ① $AF_a = s_a$ hosszú szakasz felvétele. ② AF_a szakasz $2 : 1$ arányú Apollonius köre: k . ③ AF_a szakasz γ szögű látószögműve: k_γ . ④ $k_\gamma \cap k = C$. ⑤ C -t tükrözzük F_a -ra: B . Két, az AF_a egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van.

1316. A szerkesztés: ① $AB = c$ hosszú szakasz. Ha $b \neq a$, akkor AB szakasz $b : a$ arányú Apollonius köre: k (lásd az 1311. feladatnál). Ha $b = a$, akkor AB felezőmerőlegese: f_{AB} . ② Párhuzamos AB -vel m_c távolságra: e . ③ $e \cap k = C$, illetve $f_{AB} \cap e = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1317. Adott: $BD; AD; \gamma$. A szerkesztés: ① AD és BD szakaszok felvétele úgy, hogy AD tartalmazza BD -t. ② AB szakasz $AD : BD$ arányú Apollonius köre: k . ③ AB szakasz γ szögű látószögműve: k_γ . ④ $k_\gamma \cap k = C$. Két, az AB egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van.

1318. a) Adott: $f_\gamma; m_c; \frac{a}{b}$. A szerkesztés: ① $CC_1 = m_c$

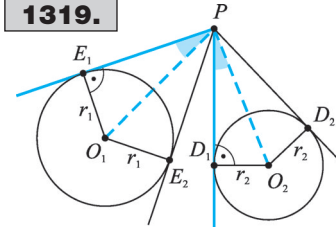
hosszú szakasz felvétele. ② C_1 -ben merőleges CC_1 -re: e . ③ C középpontú, f_γ sugarú kör: k_C . ④ $k_C \cap e = E$ (a belső szögfelezőnek a szemközti oldallal való metszéspontja). ⑤ C -ben merőleges f_γ -ra, ennek e -vel való metszéspontja D (a külső szögfelezőnek a szemközti oldalegyenessel való metszéspontja). ⑥ Szögfelezőtételek miatt $AE : EB = b : a$ és $AD : DB = b : a$. Legyen $AE = bx, EB = ax, AD = by, BD = ay$. $AD = AB + BD$ -t felhasználva $by = bx + ax + ay \Rightarrow y =$

$$= \frac{b+a}{b-a} \cdot x \Rightarrow BD = ax \frac{b+a}{b-a} \Rightarrow \frac{EB}{BD} = \frac{b-a}{b+a} = \frac{1 - \frac{a}{b}}{1 + \frac{a}{b}}$$

⑦ ED szakasz $\frac{1 - \frac{a}{b}}{1 + \frac{a}{b}}$ arányú felosztása $\rightarrow B$. ⑧ B tükrözése f_γ egyenesére: B^* . ⑨ $CB^* \cap e =$
 $= A$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

b) Adott: $f_\gamma; m_c; \frac{a}{b}$. A szerkesztés: ① $CC_1 = m_c$ hosszú szakasz felvétele. ② C_1 -ben merőleges CC_1 -re: e . ③ C középpontú, f_γ sugarú kör: k_C . ④ $k_C \cap e = D$ (a külső szögfelezőnek a szemközti oldalegyenessel való metszéspontja). ⑤ C -ben merőleges CD -re, ennek e -vel való metszéspontja E (a belső szögfelezőnek a szemközti oldallal való metszéspontja). A feladat megoldása a 6. ponttól kezdve megegyezik az a) rész megoldásával. 0 vagy 1 megoldás lehet.

1319.



1319. Ha P eleget tesz a feltételnek, akkor $E_1PE_2 \sphericalangle = D_1PD_2 \sphericalangle \Rightarrow E_1PO_1 \sphericalangle = D_1PO_2 \sphericalangle$.
 $O_1E_1P\Delta \sim O_2D_1P\Delta$, mert mindkettő derékszögű, és P -nél lévő hegyesszögük az aláhúzott állítás miatt egyenlő. $\lambda = \frac{E_1O_1}{D_1O_2} = \frac{O_1P}{O_2P} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1P}{O_2P}$. ① Ha $r_1 \neq r_2$, akkor a P pont rajta van az

O_1O_2 szakasz $r_1 : r_2$ arányú Apollonius körén. Az Apollonius-kör O_1O_2 egyenesére eső átmérőjének két végpontja a k_1 és k_2 kör belső és külső hasonlósági pontja. Ha $k_1 \cap k_2 = \emptyset$, akkor az Apollonius-kör minden pontja megfelelő tulajdonságú. Ha k_1 és k_2 metszik egymást, akkor az Apollonius-körnek csak a k_1 -en és k_2 -n kívüli pontjaiból húzhatók érintők k_1 -hez és k_2 -höz. ② Ha $r_1 = r_2$, akkor a P pont rajta van O_1O_2 szakasz felezőmerőlegesén. Ha $k_1 \cap k_2 = \emptyset$, akkor a felezőmerőleges minden pontja megfelelő tulajdonságú. Ha k_1 és k_2 metszik egymást, akkor a felezőmerőlegesnek csak a k_1 -en és k_2 -n kívüli pontjaiból húzhatók érintők k_1 -hez és k_2 -höz.

1320. A szerkesztés: ① Vegyünk fel az adott iránnyal párhuzamos egyenest $\rightarrow A'; C'$. ② Ha $c \neq a$, akkor adjuk meg $A'C'$ szakasz $c : a$ arányú Apollonius körét: k . Ha $c = a$, akkor adjuk meg $A'C'$ szakasz felezőmerőlegesét: $f_{A'C'}$. ③ $k \cap OB = B'$, illetve $f_{A'C'} \cap OB = B'$. ④ O középpontú középpontos hasonlóságot alkalmazunk az $A'B'C'\Delta$ -re úgy, hogy B' képe B legyen. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet. Indoklás: A szerkesztett háromszög megfelel az elvárásoknak, mert a középpontos hasonlóságnál a középponton át nem menő egyenes képe vele párhuzamos egyenes, tehát $A'C' \parallel AC$.

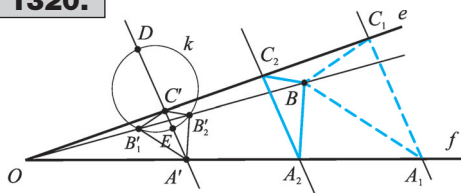
A középpontos hasonlóság aránytartó, tehát $\frac{AB}{CB} = \frac{A'B'}{C'B'} = \frac{c}{a}$. $C' \in e$ és $O \in e \Rightarrow C \in e$, valamint $A' \in f$ és $O \in f \Rightarrow A \in f$.

1321. Adott: $AC; BD; \alpha; \beta$. Felhasználjuk: Az átlók metszéspontját a kiegészítő háromszög csúcsával összekötő egyenes az $ABE\Delta$ súlyvonala (lásd az 1197. feladatot). A DB és AC egyenesek által meghatározott csúcshögek AB és DC párhuzamos szelőire alkalmazva a párhuzamos szelők tételét: $\frac{AC}{BD} = \frac{AM}{BM}$.

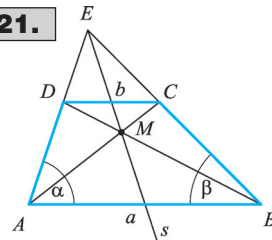
1. eset: $AC \neq BD$. A szerkesztés: ① $\alpha; \beta \rightarrow A'B'E'\Delta$. ② $A'B'$ szakasz $AC : BD$ arányú Apollonius köre: k' . ③ $A'B'E'\Delta E'$ -ből induló súlyvonala: s' . ④ $s' \cap k' = M'$. ⑤ $e(A'; M') \cap e(B'; E') = C'$ és $e(B'; M') \cap e(A'; E') = D'$. ⑥ Alkalmazzunk $\frac{AC}{A'C'}$ arányú hasonlóságot az $A'B'C'D'$ trapézra $\rightarrow ABCD$ trapéz.

2. eset: $AC = BD$. $\alpha \neq \beta$ esetén nincs megoldás, $\alpha = \beta$ esetén végtelen sok megoldás van.

1320.



1321.



1322. a) Ha a két kör sugara egyenlő, akkor $O_1O_2 \parallel P_1P_2$, ezért nincs metszéspontjuk. Különböző sugarak esetén $O_1P_1 \parallel O_2P_2$, ezért a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $O_1P_1 : O_2P_2 = O_1H_k : O_2H_k = \text{állandó} \Rightarrow \vec{H}_k$ helye a centrálison csak a sugarak arányától függ.

b) **1. eset:** A két kör sugara egyenlő. O_1 -ben és O_2 -ben merőlegest állítunk a körök centrálisára. Ezeknek a körökkel való E_1, F_1 , ill. E_2, F_2 metszéspontjai lesznek az érintési pontok. E_1E_2 egyenese az egyik, F_1F_2 egyenese a másik érintő.

2. eset: A két kör sugara különböző. ① Felvesszünk mindkét körben egy-egy sugarat, amelyek párhuzamosak és egyirányúak $\rightarrow P_1, P_2$. ② $e(O_1; O_2) \cap e(P_1; P_2) = H_k$ a két kör külső hasonlósági pontja. ③ A H_k -ből k_2 -höz húzott érintő a két kör közös érintője, hiszen a k_2 -höz húzott érintő képe a k_1 -et kell, hogy érintse, ez az egyenes pedig átmegy H_k -n, tehát invariáns, képe önmaga.

1323. a) $O_1P_1 \parallel O_2P_2$, ezért a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $O_1P_1 : O_2P_2 = O_1H_b : O_2H_b = \text{állandó} \Rightarrow H_b$ helye a centrálison csak a sugarak arányától függ.

b) ① Felvesszünk mindkét körben egy-egy sugarat, amelyek párhuzamosak és ellentétes irányúak $\rightarrow P_1, P_2$. ② $e(O_1; O_2) \cap e(P_1; P_2) = H_b$ a két kör belső hasonlósági pontja. ③ A H_b -ből k_2 -höz húzott érintő a két kör közös érintője, hiszen a k_2 -höz húzott érintő képe a k_1 -et kell, hogy érintse, ez az egyenes pedig átmegy H_b -n, tehát invariáns, képe önmaga. Megjegyzés: két körnek akkor létezik közös belső érintője, ha $r_1 + r_2 \geq O_1O_2$. Egyenlőség esetén egy közös belső érintő van.

1324. A szerkesztés: ① Legyen $P_1O_1 \parallel P_2O_2$ a k_1 , illetve k_2 kör egyirányú párhuzamos sugara! $P_1P_2 \cap O_1O_2 = H_k$ külső hasonlósági pont. ② Legyen $P_1O_1 \parallel O_2Q_2$ a k_1 , illetve k_2 kör ellentétes irányú párhuzamos sugara! $P_1Q_2 \cap O_1O_2 = H_b$ belső hasonlósági pont. Koncentrikus körök belső, illetve külső hasonlósági pontja azonos a két kör közös középpontjával.

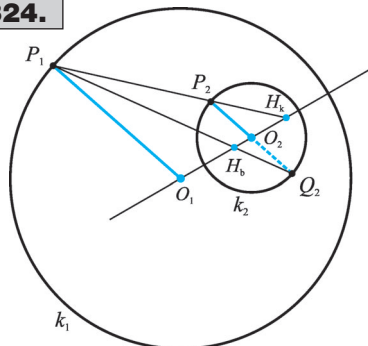
1325. a) A két kör kívülről érinti egymást: A külső hasonlósági pont a körökön kívül a kisebb kör oldalán a centrálison van úgy, hogy O_2 az O_1H_k szakasz $r_1 : r_2$ arányú osztópontja (egyenlő sugarú körök esetében nem létezik). A belső hasonlósági pont a két kör érintési pontja.

b) A két kör egyike belülről érinti a másikat: A külső hasonlósági pont a két kör érintési pontja. A belső hasonlósági pont az O_1O_2 szakasz $r_1 : r_2$ arányú osztópontja. A hasonlósági pontok szerkesztéséről l. az 1324. feladatot.

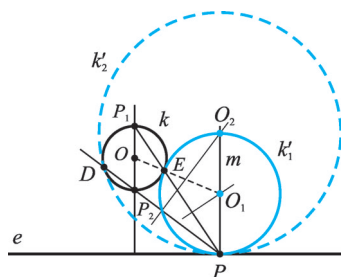
1326. A szerkesztés: ① $P_1O_1 \parallel P_2O_2$ a k_1 , illetve k_2 kör egyirányú párhuzamos sugara; $e(P_1; P_2) \cap e(O_1; O_2) = H_k$ külső hasonlósági pont, mivel $P_2O_2H_k \Delta \sim P_1O_1H_k \Delta$ és $r_1 : r_2 = H_kO_1 : H_kO_2$. Egyenlő sugarú köröknek nincs külső hasonlósági pontja. ② $P_1O_1 \parallel Q_2O_2$ a k_1 , illetve k_2 kör ellentétes irányú párhuzamos sugara; $e(P_1; Q_2) \cap e(O_1; O_2) = H_b$ belső hasonlósági pont, mivel $Q_2O_2H_b \Delta \sim P_1O_1H_b \Delta$ és $r_1 : r_2 = H_bO_1 : H_bO_2$.

1327. A szerkesztés: ① Keressük meg a k kör és a szerkesztendő kör hasonlósági pontját! {Az érintési pont a belső hasonlósági pontja az egymást kívülről érintő köröknek, külső hasonlósági pontja a két körnek, ha az egyik belülről érinti a másikat.}. ② A P -ben e -re állított m me-

1324.



1327.



rőleges lesz a k' kör sugarának egyenese, az O -ból e -re állított merőleges pedig a k kör sugarának egyenese $\rightarrow P_1; P_2 \in k$. ③ $e(P_1; P) \cap k = E$ az egymást kívülről érintő körök belső hasonlósági pontja, tehát az érintési pont. EP felezőmerőlegesének és m -nek a metszéspontja O_1 . ④ O_1 középpontú, O_1P sugarú kör: k'_1 . ⑤ $e(P_2; P) \cap k = D$ a belülről érintő körök külső hasonlósági pontja, tehát az érintési pont. DP felezőmerőlegesének és m -nek a metszéspontja O_2 . ⑥ O_2 középpontú, O_2P sugarú kör: k'_2 . 2 megoldás van.

1328. 1. eset: OE nem merőleges f -re. A szerkesztés: ① A k kört E -ben érintő k' körnek és k -nak E -ben közös az érintő egyenese, az OE -re E -ben állított merőleges: e . ② $e \cap f = P$. ③ AP csúcsú, e és f szárú szög szárait érintő körök középpontjai a szögfelezőkön vannak: $g_1; g_2$. ④ $g_1 \cap e(O; E) = O'_1$ és $g_2 \cap e(O; E) = O'_2$. ⑤ O'_1 középpontú, O'_1E sugarú kör: k'_1 és O'_2 középpontú, O'_2E sugarú kör: k'_2 . 2 megoldás van.

2. eset: Ha $OE \perp f$, akkor $e \parallel f$, tehát nem használhatjuk a vázolt gondolatmenetet. Ekkor kaphatunk 0 megoldást, 1 megoldást vagy végtelen sok megoldást.

1329. ① A szerkesztendő k' kör belülről érinti a k kört. Az 1325. feladatban láttuk, hogy a közös érintési pont a két kör külső hasonlósági pontja. ② A k' kör egyik sugáregyenese az e -re E pontban állított m merőleges. A k kör vele párhuzamos és egyirányú sugara OP . ③ $e(E; P) \cap k = D$ a külső hasonlósági pont, vagyis az érintési pont. ④ $e(O; D) \cap m = O'$; O' középpontú $O'D$ sugarú kör $\Rightarrow k'$. 2 megoldás van.

Pitagorasz tételének alkalmazása

1330. $x \approx 31,63$ m. (Még egy tízszintes toronyház is elférne.)

1331. $h \approx 6, 11$ m hosszú a rúd. **1332.** $BD \approx 4,97$ m. **1333.** Körülbelül 20,04 m hosszú.

1334. $l \approx 2,25$ m az átlóvas hossza. **1335.** $x \approx 10,77$ m a csúszda hossza.

1336. P -ből a száakra állított merőlegesek talppontjai T, U , a derékszög csúcsa C . $d(P; T) = a$, $d(P; U) = b \Rightarrow CTPU$ négyszög téglalap $\Rightarrow CT = b$. Pitagorasz-tétel szerint CTP derékszögű háromszögben $a^2 + b^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2} = d(P; C)$.

1337. T felezi CB szakaszt $\Rightarrow ADBT$ négyszög derékszögű trapéz. BU merőleges AD -re $\Rightarrow BUD$ háromszög derékszögű, befogói 143,3 m és 170,575 m. Pitagorasz-tétel BUD derékszögű háromszögben: $BD^2 = 143,3^2 + 170,575^2 \Rightarrow BD \approx 222,78$ m hosszú a feszítő kötél.

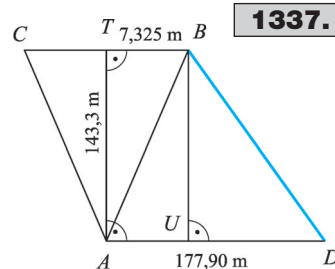
1338. AMC derékszögű háromszögben $AM^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow AM = 12$ m. $BM = AM - AB = 7,8$ m. BMC derékszögű háromszögben $7,8^2 + 5^2 = x^2 \Rightarrow x \approx 9,26$ m a rúd hossza.

1339. $m = 15$ cm a magasság.

1340. Az egyenlő szárú háromszöget az alaphoz tartozó magassága két egybevágó derékszögű háromszögre bontja, melynek befogói $24x$ és 35 cm, átfogója $25x$ hosszú. $(24x)^2 + 35^2 = (25x)^2 \Rightarrow x = 5$ cm $\Rightarrow 48x = 240$ cm az alap, $25x = 125$ cm a szár.

1341. Szabályos háromszög oldalfelező merőlegese és magassága megegyezik. Beírt és köré írt körének középpontja a súlypont, ami a magasság csúcstól távolabbi harmadolópontja. AFC

derékszögű háromszögben $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + CF^2 = a^2 \Rightarrow CF = \frac{a\sqrt{3}}{2} = m$ a magasság, $CS = \frac{2}{3}m = \frac{a\sqrt{3}}{3} = R$ a körülírt kör sugara, $SF = \frac{1}{3}m = \frac{a\sqrt{3}}{6} = r$ a beírt kör sugara.



1337.

1342. Szabályos háromszög köré írt körének sugara $\frac{2}{3}$ -a a magasságának $\Rightarrow R = \frac{2}{3} m = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{3}} R = \sqrt{3}R$.

1343. Pitagorasz-tétel a magasság által lemetszett egyik derékszögű háromszögre: $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} h = \frac{2\sqrt{3}h}{3}$.

1344. BCE szabályos háromszög magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. BC felezőpontja $F \Rightarrow AFE$ háromszög derékszögű és befogóinak hossza $\frac{3}{2}a$, illetve $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. $AE^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow AE = \sqrt{3}a = ED$. A két gerenda hossza $\sqrt{3} \cdot 3,6 \text{ m} \approx 6,24 \text{ m}$.

1345. A hálózat egyeneseinek távolsága 14 mm, illetve 24,25 mm.

1346. A háromszög egy szabályos háromszög „fele”: $a^2 + b^2 = (2a)^2 \Rightarrow b = a\sqrt{3}$.

1347. A háromszög egy szabályos háromszög „fele”: $a^2 + b^2 = (2a)^2 \Rightarrow a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{b\sqrt{3}}{3}$.

1348. Szabályos háromszögben $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A feladat szerint $m = a - d \Rightarrow a - d = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2d}{2 - \sqrt{3}} = (4 + 2\sqrt{3})d$.

1349. A befogó $\approx 3,46 \text{ m}$, az átfogó $\approx 6,93 \text{ m}$.

1350. Az α szárszögű $ABC\Delta$ és $A'B'C\Delta$ szabályos háromszög $\Rightarrow ABC\Delta \sim A'B'C\Delta$;

$$m_{ABC} = \frac{D\sqrt{3}}{2}; \quad m_{A'B'C} = \frac{d\sqrt{3}}{2}; \quad ABB'A' \text{ trapéz magassága } h \Rightarrow m_{A'B'C} + h = m_{ABC}.$$

a) $d = 16,5 \text{ cm}$, $h = 7,5 \text{ cm}$, $\frac{d\sqrt{3}}{2} + h = \frac{D\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{16,5\sqrt{3}}{2} + 7,5 = \frac{D\sqrt{3}}{2} \Rightarrow D = 16,5 + \frac{15}{\sqrt{3}} \approx$

$\approx 25,16 \text{ cm}$. b) $D = 30 \text{ cm}$, $h = 9,5 \text{ cm}$, $\frac{d\sqrt{3}}{2} + h = \frac{D\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{d\sqrt{3}}{2} + 9,5 = \frac{30\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = 30 -$

$-\frac{19}{\sqrt{3}} \approx 19,03 \text{ cm}$. c) $D = 35 \text{ cm}$, $d = 22 \text{ cm}$, $\frac{d\sqrt{3}}{2} + h = \frac{D\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{22\sqrt{3}}{2} + h = \frac{35\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h =$

$= \frac{13\sqrt{3}}{2} \approx 11,26 \text{ cm}$.

1351. A szárak hossza $\approx 2,83 \text{ cm}$.

1352. $AC = 29 \text{ cm}$.

1353. 1. eset: $AB = 25 \text{ cm}$. 2. eset: $AB = 11 \text{ cm}$.

1354. a) $d = a\sqrt{2}$. b) $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

1355. a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2}$. Ha $a\sqrt{2} = a + 2$, akkor $a = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \approx 4,83$ cm.

1356. A négyzet átlója a köré írt kör átmérője. Az a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2} \Rightarrow a = r\sqrt{2}$.

1357. $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

1358. Thalész-tétel szerint a téglalap átlója egyenlő a köré írt kör átmérőjével. Pitagorasz-tételt alkalmazva: $d^2 \geq 35^2 + 20^2 \Rightarrow d \geq 40,31$ cm.

1359. Thalész- és Pitagorasz-tételt alkalmazva $d^2 \geq 32^2 + 32^2 \Rightarrow d \geq 45,25$ mm.

1360. $d^2 \geq 10^2 + 10^2 \Rightarrow d \geq 14,14$ cm. Nem lehet belőle 10 cm alapélű gerendát készíteni.

1361. $68^2 = (8x)^2 + (15x)^2 \Rightarrow x = 4$ cm. Az oldalak 32 cm, 60 cm hosszúak.

1362. Thalész-tétel szerint a derékszögű háromszög átfogója egyenlő a háromszög köré írt körének átmérőjével. Pitagorasz-tételt alkalmazva $(2r)^2 = 8^2 + 18^2 \Rightarrow \sqrt{97}$. A köré írt kör sugarára kerekítve 9,85 cm.

1363. A derékszögű háromszög átfogójához tartozó súlyvonala egyenlő a háromszög köré írt kör sugarával. Alkalmazva Pitagorasz-tételt $(2r)^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow r = 10$ cm. A súlyvonal hossza 10 cm.

1364. $a = 37$ cm.

1365. $k = 1$ m $\Rightarrow a = 25$ cm a rombusz oldala. Az átlók a rombuszt négy egybevágó derékszögű háromszögre bontják. Ha az átlók aránya 3 : 4, akkor a félátlók aránya is ennyi. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt: $25^2 = (3x)^2 + (4x)^2 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow 15$ cm és 20 cm a befogók hossza \Rightarrow az átlók hossza 30 cm és 40 cm.

1366. A rombusz területe kétféleképpen: $t = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot m_a$. A félátlók által meghatározott derékszögű háromszögben $a^2 = 7^2 + 24^2 \Rightarrow a = 25$ cm $\Rightarrow m_a = \frac{e \cdot f}{2a} = \frac{14 \cdot 48}{2 \cdot 25} = \frac{336}{25} \approx 13,44$ cm.

1367. A másik átló $2 \cdot 13,75 = 27,5$ cm hosszú.

1368. $m = 2$ cm a trapéz magassága.

1369. ATD derékszögű háromszögben $AT^2 + 40^2 = 41^2 \Rightarrow AT = 9$ cm. $k = \frac{AB + CD}{2} = 45$ és $AT = \frac{AB - CD}{2} = 9 \Rightarrow AB = 54$ cm és $CD = 36$ cm az alapok hossza.

1370. Legyenek az érintési pontok E, F, G és H . A trapéz magassága a kör átmérője, azaz 6 cm. Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $AE = AH = 5$ cm $= BE = BF$ és $DH = DG = CG = CF = x$. ATD derékszögű háromszögben $AT = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x$, $DT = 6$ cm és $AD = 5 + x$. Pitagorasz-tétel szerint: $(5 - x)^2 + 6^2 = (5 + x)^2 \Rightarrow x = 1,8$ cm. A trapéz szárai 6,8 cm, alapja 3,6 cm és 10 cm hosszúak.

1371. $AB = 36$ cm, $CD = 10$ cm, $DT = 2r$, $AT = \frac{36 - 10}{2} = 13$ cm, $AD = \frac{AB + CD}{2} = \frac{36 + 10}{2} = 23$ cm. ATD derékszögű háromszögben: $13^2 + (2r)^2 = 23^2 \Rightarrow r = 3\sqrt{10}$ cm. A beírt kör sugara közelítőleg 9,49 cm.

1372. Legyen O_0 a beírt kör középpontja, E_1, E_2, E_3 és E_4 a négy érintési pont. $O_0AD\Delta$ derékszögű, mivel a trapéz egy száron levő szögeinek összege $\alpha + \delta = 180^\circ$. $O_0E_4 \perp AD$. Az érintőszakaszok egyenlősége miatt $DE_4 = \frac{c}{2}$; $AE_4 = \frac{a}{2}$. Alkalmazzuk a magasságtételt az O_0AD -re:

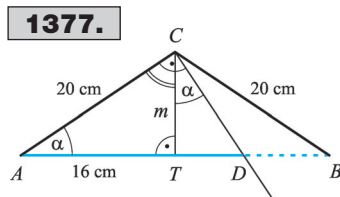
$$r^2 = \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow 4r^2 = c \cdot a \Rightarrow A \text{ beírt kör átmérője az alapok mértani közepe.}$$

1373. Az átlók hossza 7 m.

1374. Legyen U pont a C -ből AB -re bocsátott merőleges talppontja. $DU = AC < BD$. $BU = b - a$. BUC derékszögű háromszögben: $CU^2 + (b - a)^2 = a^2 \Rightarrow CU^2 = b(2a - b) = DA^2$. ABD derékszögű háromszögben: $DB^2 = DA^2 + AB^2 \Rightarrow DB^2 = b(2a - b) + b^2 = 2ab$. $DB = \sqrt{2ab}$ a hosszabb átló hossza.

1375. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $BD = e$, $AC = f$. ABD derékszögű háromszögben $a^2 + d^2 = e^2$ és ACD derékszögű háromszögben $d^2 + c^2 = f^2$, így $e^2 - f^2 = a^2 - c^2$.

1376. $AT : BT = 3 : 10$. ATP derékszögű háromszögben $(3x)^2 + m^2 = 41^2$ és BTP derékszögű háromszögben $(10x)^2 + m^2 = 50^2 \Rightarrow m = \underline{\underline{40 \text{ cm}}}$.



1377. ATC derékszögű háromszögben a Pitagorasztétel szerint: $m^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow m = 12 \text{ cm}$. $TCD \sphericalangle = TAC \sphericalangle = \alpha$, mert merőleges szárú hegyesszögek; $ATC\Delta \sim CTD\Delta$, mert szögeik páronként egyenlők \Rightarrow megfelelő oldalai aránya is egyenlő: $\frac{TD}{m} = \frac{m}{AT} \Rightarrow \frac{TD}{12} = \frac{12}{16} \Rightarrow TD = 9 \text{ cm} \Rightarrow \underline{\underline{AD}} = AT + TD = \underline{\underline{25 \text{ cm}}}$, $\underline{\underline{BD}} = AB - AD = \underline{\underline{7 \text{ cm}}}$.

1378. $AD = 98 \text{ cm}$; $BD = 527 \text{ cm}$. D az AB szakasz belső pontja, mert $AC < BC \Rightarrow AB = AD + BD = 625 \text{ cm}$. $AC = DC$, ezért a CT magasság az AD felezőmerőlegese $\Rightarrow AT = \frac{AD}{2} = 49 \text{ cm}$ és $BT = AB - AT = 576 \text{ cm}$. A magasságtétel szerint ACB derékszögű háromszögben: $CT^2 = AT \cdot BT = 49 \cdot 576 = 28\,224$. A Pitagorasztétel szerint ATC és CTB derékszögű háromszögekben: $CA^2 = AT^2 + CT^2 = 49^2 + 28\,224 = 30\,625 \Rightarrow CA = \sqrt{30\,625} = 175$. $CB^2 = BT^2 + CT^2 = 576^2 + 28\,224 = 360\,000 \Rightarrow CB = 600$. A befogók hossza 175 cm és 600 cm.

1379. A szögfelezőtétel szerint $CB : CA = 2 \frac{6}{7} : 2 \frac{1}{7} = \frac{20}{7} : \frac{15}{7} = 4 : 3$. A Pitagorasztétel miatt az ABC derékszögű háromszögben $(4x)^2 + (3x)^2 = 5^2 \Rightarrow x = 1$. A befogók hossza CB = 4 cm, CA = 3 cm.

1380. Legyen $D \in AC$ a szögfelezőnek az AC befogóval való metszéspontja. A szögfelezőtétel szerint $CD : DA = a : a\sqrt{2}$, valamint $CD + DA = a \Rightarrow \underline{\underline{DA}} = \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = \underline{\underline{a(2 - \sqrt{2})}}$ és

$$\underline{\underline{CD}} = a(\sqrt{2} - 1).$$

1381. A szögfelezőtétel szerint $AB : AC = m : n$. A Pitagorasz-tétel szerint $(m+n)^2 + (nx)^2 = (mx)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{(m+n)^2}{m^2-n^2} = \frac{m+n}{m-n}$. Az átfogó hossza $AB = m \cdot \sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$, a keresett befogó hossza

$$AC = n \cdot \sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$$

1382. Pitagorasz-tétel az ABC derékszögű háromszögben: $AB^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow AB = 25$ cm.

Az ABC háromszög területe kétféleképpen felírva: $T_{\Delta} = \frac{20 \cdot 15}{2} = \frac{25 \cdot CT}{2} \Rightarrow CT = 12$ cm. Ma-

gasságtétel az ABC derékszögű háromszögben: $12^2 = AT(25 - AT) \Rightarrow AT^2 - 25AT + 144 = 0$.

A másodfokú egyenlet megoldásai $(AT)_1 = 16$ cm és $(AT)_2 = 9$ cm. $AT > BT \Rightarrow$ az átfogó szele-
teinek hossza: $AT = 16$ cm, $BT = 9$ cm.

1383. A szögfelezőtétel szerint: $AD : DB = AC : CB = 7 : 9$. A befogótétel szerint: $AT \cdot AB = (7x)^2$ és $BT \cdot AB = (9x)^2 \Rightarrow AT : BT = 7^2 : 9^2 = 49 : 81$.

1384. Pitagorasz-tétel szerint az ABC derékszögű háromszögben: $AB^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow AB =$

$= 25$ cm. Az ABC háromszög területét kétféleképp felírva: $T_{ABC} = \frac{15 \cdot 20}{2} = \frac{25 \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c =$

$= 12$ cm. Befogótétel az ABC háromszögben: $AT \cdot AB = AC^2 \Rightarrow AT = 9$ cm, $BT = 16$ cm. Szög-

felezőtétel az ATC háromszögben: $AD : DT = 15 : 12$, azaz $(9 - DT) : DT = 15 : 12 \Rightarrow DT =$

$= 4$ cm. Szögfelezőtétel a BTC háromszögben: $BE : ET = 20 : 12$, azaz $(16 - ET) : ET =$

$= 20 : 12 \Rightarrow ET = 6$ cm. $DE = DT + ET = 10$ cm hosszú szakaszt metsz ki az átfogóból a két

szögfelező.

1385. Pitagorasz-tétel szerint a BFC derékszögű háromszögben $\Rightarrow CF^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow CF =$

$= 8$ cm. Szögfelezőtétel a BFC háromszögben $\Rightarrow CD : (CF - CD) = 10 : 6$, azaz $CD : (8 - CD) =$

$= 10 : 6 \Rightarrow CD = 5$ cm.

1386. $OF = 39$ mm.

1387. $OF = \sqrt{9,75}$ cm $\approx 3,12$ cm.

1388. $AB \cap O_1O_2 = F$. Pitagorasz-tétel az O_1FA derékszögű háromszögben: $O_1F^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r_1^2$,

azaz $O_1F^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow O_1F = 5$ cm. Pitagorasz-tétel az O_2EA derékszögű háromszögben:

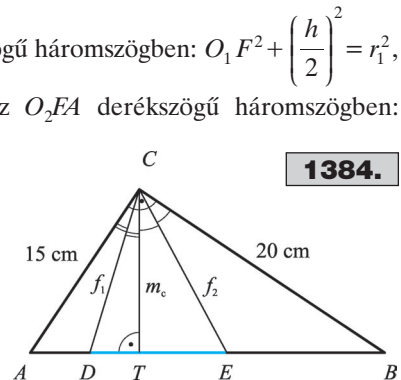
$O_2F^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r_2^2$, azaz $O_2F^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow O_2F = 9$ cm.

1. eset: AB húr elválasztja a két kör középpontját \Rightarrow

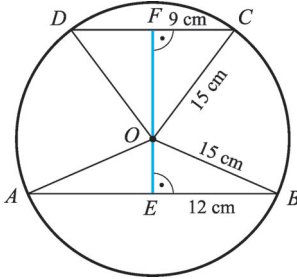
$\Rightarrow O_1O_2 = O_1F + O_2F = 14$ cm.

2. eset: AB húr nem választja el a két kör középpontját \Rightarrow

$\Rightarrow O_1O_2 = O_2F - O_1F = 4$ cm.



1384.

1389.

1389. Pitagorasz-tétel az OEB , illetve az OFC derékszögű háromszögekben: $OE^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow OE = 9$ cm, illetve $OF^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow OF = 12$ cm $\Rightarrow \underline{d(AB; CD) = EF = OE + OF = 21}$ cm.

1390. $OE = 18$ cm, illetve $OF = 24$ cm. $\underline{d(AB; CD) = EF = OF - OE = 6}$ cm.

1391. Felhasználjuk, hogy a Pitagorasz-tétel szerint

$$d^2(O; AB)^2 + d^2(O; AB)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2. \quad OE^2 + 20^2 = 25^2 \Rightarrow OE = 15 \text{ cm, illetve } OF^2 + 7^2 = 25^2 \Rightarrow OF = 24 \text{ cm.}$$

1. eset: a középpont a két húr között van $\Rightarrow EF = OE + OF = 39$ cm.

2. eset: a középpont a két húr sávján kívül van $\Rightarrow EF = OF - OE = 9$ cm. A két húr távolsága 39 cm vagy 9 cm.

1392. $EB = 24$ cm, $FC = 20$ cm. A Pitagorasz-tétel szerint: $OE^2 + 24^2 = r^2$ és $OF^2 + 20^2 = r^2 \Rightarrow OF^2 - OE^2 = (OF - OE)(OF + OE) = 176$.

1. eset: az O pont az AB és a CD húr között van $\Rightarrow OE_1 + OF_1 = 22$ cm. $OF_1 - OE_1 = \frac{176}{22} = 8$ cm $\Rightarrow OF_1 = 15$ cm $\Rightarrow r_1^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow \underline{r_1 = 25}$ cm.

2. eset: az O pont az AB és a CD húr sávján kívül van $\Rightarrow OF_2 - OE_2 = 22$ cm. $OF_2 + OE_2 = \frac{176}{22} = 8$ cm $\Rightarrow OE_2 = -7$, ami lehetetlen.

1393. 1. eset: a körszelet nem tartalmazza a középpontot $\Rightarrow OE = r - h$.

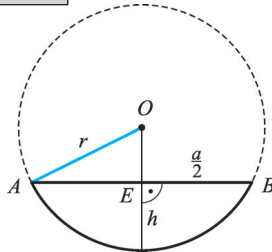
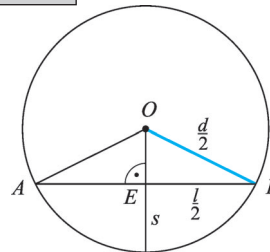
2. eset: a körszelet tartalmazza a középpontot $\Rightarrow OE = h - r$. Mindkét esetben $OE \perp AB \Rightarrow OE$ felezi az AB szakaszt \Rightarrow az OEB háromszög derékszögű: átfogója r , befogói $\frac{a}{2}$ és $OE = |r - h|$.

A Pitagorasz-tétel szerint $r^2 = (|r - h|)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, azaz $r^2 = r^2 - 2rh + h^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow r = \frac{h}{2} + \frac{a^2}{8h}$.

1394. Az OEB derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint $\left(\frac{d}{2} - s\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$,

azaz $\frac{d^2}{4} - ds + s^2 + \frac{l^2}{4} = \frac{d^2}{4} \Rightarrow d = s + \frac{l^2}{4s}$. a) $d = 25 + \frac{200^2}{4 \cdot 25} = 425 \Rightarrow$ Az átmérő 425 mm.

b) Az átmérő hossza $\underline{d = s + \frac{l^2}{4s}}$.

1393.**1394.**

1395. $AT = UB = x$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az OUC , az AUC és az ATD derékszögű háromszögekben!

- I. $(R-x)^2 + m^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 2Rx + x^2 + m^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + m^2 = 2Rx$.
- II. $(2R-x)^2 + m^2 = 84^2 \Rightarrow 4R^2 - 4Rx + x^2 + m^2 = 84^2 \Rightarrow 4R^2 - 2(x^2 + m^2) + x^2 + m^2 = 84^2 \Rightarrow 4R^2 - (x^2 + m^2) = 84^2$.
- III. $x^2 + m^2 = 18^2$. II. és III. $\Rightarrow 4R^2 = 84^2 + 18^2 \Rightarrow \underline{R \approx 43 \text{ cm}}$.

1396. $PE = 77 \text{ cm}$. **1397.** $PO = 61 \text{ cm}$.

1398. A Pitagorasz-tétel az OE_1P derékszögű háromszögben: $7^2 + E_1P^2 = 25^2 \Rightarrow E_1P = 24 \text{ cm}$.

Az OE_1P háromszög területe: $t_{OE_1P} = \frac{7 \cdot 24}{2} = \frac{25 \cdot E_1T}{2} \Rightarrow E_1T = 6,72 \Rightarrow \underline{E_1E_2 = 13,44 \text{ cm}}$.

1399. $E_1E_2 = 120 \text{ cm} \Rightarrow E_1T = 60 \text{ cm}$. $PE_1 = PE_2 = 156 \text{ cm}$. A PE_1O háromszög területét kétféleképpen felírva: $\frac{PO \cdot 60}{2} = \frac{156 \cdot OE_1}{2} \Rightarrow PO = \frac{156 \cdot OE_1}{60}$. A Pitagorasz-tétel a PE_1O derékszögű háromszögben: $PO^2 = 156^2 + OE_1^2$. PO -t behelyettesítve a megfelelő algebrai átalakítások után: $\underline{OE_1 = 65 \text{ cm}}$.

1400. A Thalész-tétel miatt D -nél derékszög van $\Rightarrow BD$ az ABC háromszög átfogóhoz tartozó magassága \Rightarrow alkalmazható rá a magasságtétel: $BD^2 = AD \cdot DC = 32 \cdot 18 = 16 \cdot 36$. A Pitagorasz-tétel az $ABD\Delta$ -re: $AB^2 = 32^2 + 16 \cdot 36 \Rightarrow AB = 40 \text{ cm} \Rightarrow \underline{r = 20 \text{ cm}}$.

1401. A Thalész-tétel szerint $ADB \sphericalangle = 90^\circ$. $ADB\Delta \sim ABC\Delta \sim BDC\Delta$, mert szögeik egyenlők. $AB = 2r$; $BC = r \Rightarrow AB : BC = 2 : 1 \Rightarrow AD : DB = 2 : 1$ és $BD : DC = 2 : 1$. $\Rightarrow \underline{AD : DB : DC = 4 : 2 : 1 \Rightarrow AD : DC = 4 : 1}$.

1402. Alkalmazzuk a szelődarabok tételét: $PA \cdot PB = PE^2 \Rightarrow 10PB = 12^2 \Rightarrow PB = 14,4 \text{ cm} \Rightarrow AB = 4,4 \text{ cm}$. Mivel $EP \perp PA$, $d(E; P) = d(O; F) = 12 \text{ cm}$. Pitagorasz-tétel az OFA derékszögű háromszögben: $OA^2 = OF^2 + AF^2 \Rightarrow r^2 = 12^2 + 2,2^2 \Rightarrow \underline{r = 12,2 \text{ cm}}$.

1403. Legyenek E_1 és E_2 az érintési pontok, T az O_2E_2 -re O_1 -ből bocsátott merőleges talppontja. $e(E_1; E_2) \parallel e(O_1; T) \Rightarrow E_1E_2 = O_1T$. O_1TO_2 derékszögű háromszögben: $O_1T^2 + O_2T^2 = O_1O_2^2 \Rightarrow E_1E_2^2 + O_2T^2 = O_1O_2^2$. a) $O_2T = r_2 - r_1 = 2 \text{ cm} \Rightarrow E_1E_2 = \underline{\underline{\sqrt{60} \approx 7,75 \text{ cm}}}$.

b) $O_2T = r_2 + r_1 = 4 \text{ cm} \Rightarrow E_1E_2 = \underline{\underline{\sqrt{48} \approx 6,93 \text{ cm}}}$.

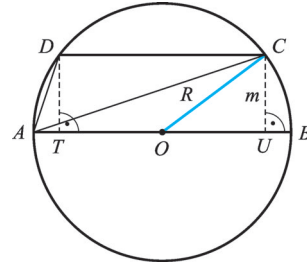
1404. a) $E_1E_2 = 48 \text{ cm}$. b) $E_1E_2 = 30 \text{ cm}$. **1405.** $E_1E_2 = 40 \text{ cm}$.

1406. Pitagorasz-tétel az $O_1E_1O_2$ derékszögű háromszögben: $E_1O_2^2 + r_1^2 = (r_1 + r_2)^2$. Pitagorasz-tétel az $E_1E_2O_2$ derékszögű háromszögben: $E_1E_2^2 + r_2^2 = E_1O_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - r_1^2 \Rightarrow E_1E_2 =$

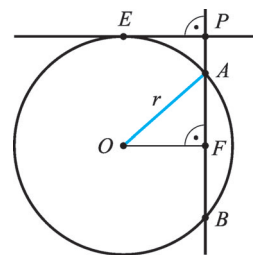
$= \underline{\underline{\sqrt{2r_1r_2}}}$.

1407. A Thalész-tétel szerint $ACB \sphericalangle = 90^\circ$. Az adatokból $AT = 1 \text{ m}$, $TB = 3 \text{ m}$. Alkalmazzuk az ACB derékszögű háromszögre a magasságtételt: $CT^2 = AT \cdot TB$. Az adatokat behelyettesítve: $CT = \underline{\underline{\sqrt{3} \text{ m} \approx 1,73 \text{ m}}}$ magas az állvány.

1395.



1402.



1407.

